Math. P.
369 a

R

Math. P. 369a

R

Ausführliche evidente

Theorie der Parallellinien

herausgegeben

von

Johann Wolfgang Müller
Professor der Mathematik am Gymnasium in Nürnberg.

Mit einer Kupfertafel.

Nürnberg
in der J. L. S. Lechnerischen Buchhandlung.
1819.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einleitung.

Die älteste Theorie der Parallellinien, welche wir kennen, ist die, welche Euklid in dem ersten Buch seiner Elemente geliefert hat. Sie gründet sich auf folgende Definition: Gerade Linien sind parallel, wenn sie in der nemlichen Ebene sind, und in das Unbegränzte nach den beiden Gegenden verlängert, nach keiner zu miteinander zusammentreffen, und auf den als Grundsatz aufgestellten Satz: Wenn eine gerade Linie, welche zwei gerade Linien trift, die innern nach der nemlichen Gegend liegenden Winkel kleiner als zwei rechte macht, so werden diese zwei ins Unbegränzte verlängerten geraden Linien miteinander zusammentreffen, nach der Gegend zu, nach der die Winkel, welche kleiner als zwei rechte sind, liegen. Ausser diesen beiden Sätzen, braucht Euklid auch vorzüglich folgenden, als Lehrsatz aufgestellten, und so ausgedrückten Satz: In jedem Dreieck ist, wenn eine der Seiten verlängert worden, der äussere Winkel grösser als jeder der beiden innern gegenüberstehenden. Auf diesen Lehrsatz bezieht er sich, bei dem Beweis des Lehrsatzes: daß zwei in der nemlichen Ebene liegenden geraden Linien parallel sind, wenn eine sie schnei-

bende gerade Linie die Wechselswinkel gleich macht. Den vorhin angeführten Grundsatz aber braucht er bei dem Beweis des Lehrsatzes: daß, wenn zwei gerade Linien parallel sind, jede sie schneidende gerade Linie die Wechselswinkel gleich macht. Dieser von Euklid als Grundsatz aufgestellte Satz hat nun keine größere Evidenz, als der von ihm als Lehrsatz vorgetragene Satz: daß der äussere Winkel eines Dreiecks größer ist, als jeder der beiden ihm gegenüberstehenden innern Winkel. Er kann also nicht als ein eigentlicher Grundsatz, das heißt: als ein solcher einfacher theoretischer Satz betrachtet werden, dessen Richtigkeit unmittelbar aus dem construirten, oder in der reinen Anschauung dargestellten, in der Definition nach seinen Merkmalen bestimmten Begriff des Gegenstandes, klar ist. Er gehört folglich nicht zu den Sätzen, welche die Griechischen Mathematiker Κοιναι εννοιαι, allgemein geltende Wahrheiten, oder Sätze, die jedem gemeinen Menschenverstand sogleich einleuchten, nennten, wie zum Beispiel: das Ganze ist größer als ein Theil desselben, Größen, die derselben Größe gleich sind, sind selbst gleich, und dergleichen mehr. Euklid hat ihn sehr wahrscheinlich bei den Grundsätzen aufgeführt, weil er keinen Beweis für ihn fand, und nicht deswegen, weil er überhaupt keines Beweises bedarf, oder durchaus nicht erwiesen werden kann. Kästner sagt in seinen Anfangsgründen der Geometrie, daß Gregorius in seiner Ausgabe der Elemente Euklids anführe, in einigen Handschriften werde er als Postulat aufgestellt, und setzt hinzu: „so wäre freilich die Bemühung, ihn einleuchten„der zu machen, vermieden." Diese Behauptung Kästners scheint mir unverständlich. Denn nach seiner eigenen Erklärung sind Postulate solche Sätze, „welche fordern, „daß man eine Sache verrichten könne, ohne die

„Art, wie es geschehen soll, zu zeigen, weil sol„che vielleicht zu offenbar in die Augen fällt, „als daß sie dürfte gezeigt werden.“ (Anfangsgründe der Arithmetik u. s. f. Vorerinnerungen, §. 28.) Das heißt: Postulate sind solche praktische Sätze, welche fordern, daß man zugeben soll, etwas sei real möglich, nemlich zu construirend, oder in der reinen Anschauung darstellbar, ohne daß die Art dieser realen Möglichkeit, nemlich die Art der Construction, oder der Darstellung in der reinen Anschauung, angegeben werden kann. Sie unterscheiden sich also wesentlich dadurch von den Grundsätzen, daß in diesen der Gegenstand schon als construirt, oder in der reinen Anschauung dargestellt, nach dem wissenschäftlichen Ausdruck, als gegeben betrachtet wird, da im Gegentheil das Postulat die Hervorbringung des Gegenstandes vermittelst der Construction, fordert. Oder der Grundsatz behauptet etwas von einem Gegenstand, dessen reale Möglichkeit anzunehmen, das Postulat fordert. Z. B. Der erwähnte Grundsatz behauptet etwas von verlängerten geraden Linien, und zwei vorhergehende Postulate fordern, daß man sich die gerade Linie und ihre Verlängerung als real möglich vorstellen soll. Nie kann daher ein Grundsatz als Postulat ausgesprochen werden, oder ein Postulat als Grundsatz.

Zwar ist bekannt, daß Aufgaben die Form eines Lehrsatzes gegeben werden kann, wenn man die Auflösung derselben zur Hypothesis (Voraussetzung, Annahme oder Bedingung,) und den, dem Satz der Aufgabe gemäß zu construirenden Gegenstand, als schon construirt betrachtet, zur Thesis, (Behauptung,) des Lehrsatzes macht. Z. B. Es sei die Aufgabe: Ein Quadrat zu verdoppeln. Die Auflösung ist: man ziehe in dem gegebenen Quadrat eine Diagonale, und beschreibe auf derselben ein Quadrat. Der

Beweis ist bekannt, und zeigt, daß wenn man die in der Auflösung angegebene Construction macht, das construirte Quadrat das doppelte des gegebenen ist. Wird diese Aufgabe als Lehrsatz dargestellt, so hat dieser folgende Form: Das Quadrat B auf der Diagonale des Quadrats A ist das Doppelte des Quadrats A. Der Beweis dieses Lehrsatzes ist einerlei mit dem Beweis der Aufgabe. Ferner: es sei die Aufgabe: Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben, so ist die Auflösung: Man verbinde die drei gegebenen Punkte durch zwei gerade Linien, halbire diese, ziehe durch jeden Halbirungspunkt eine auf der Verbindungslinie senkrechte Linie, verlängere diese senkrechten Linien, bis sie sich schneiden, und beschreibe aus ihrem Durchschnittspunkt als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser, welcher der Entfernung eines der gegebenen drei Punkte vom Durchschnittspunkt der senkrechten Linien gleich ist, einen Kreis. Der Beweis ist bekannt. Wird diese Aufgabe als Lehrsatz ausgedrückt, so heißt dieser: Drei gegebene, nicht in einer geraden Linie befindlichen Punkte liegen in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt derjenigen zwei geraden Linien, von denen zwei andere gerade Linien, welche die drei gegebenen Punkte verbinden, senkrecht halbirt werden, und dessen Halbmesser die Entfernung eines der drei gegebenen Punkte vom Durchschnittspunkt der beiden senkrechten Linien ist. Hier ist die etwas versteckte Hypothesis des Lehrsatzes: ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der beiden die Verbindungslinien senkrecht in der Mitte schneidenden Linien u. s. f. ist, die Thesis aber ist die Einerleiheit dieses Kreises mit demjenigen Kreis, in dessen Peripherie die drei gegebenen Punkte liegen. Umgekehrt kann ein Lehrsatz als Aufgabe ausge-

drückt werden, wenn man seine Hypothesis zur Auflösung und seine Thesis zum Satz der Aufgabe macht. Z. B. In jedem rechtwinklichen Dreieck ist die Summe der Katheten=quadrate dem Quadrat der Hypotenuse gleich. Hier ist die Hypothesis: Zwei auf den beiden Katheten eines recht=winklichen Dreiecks beschriebenen Quadrate, und ein auf der Hypotenuse beschriebenes Quadrat, und die Thesis, die Gleichheit der Summe der erstern beiden Quadrate mit dem letztern. Wird nun dieser Lehrsatz als Aufgabe dar=gestellt, so heißt diese: Ein Quadrat zu beschreiben, wel=ches der Summe zweier gegebenen Quadrate gleich ist, und die Auflösung heißt: Man beschreibe ein rechtwinkliches Dreieck, bei dem jede Kathete der Seite eines der beiden gegebenen Quadrate gleich ist, und beschreibe auf der Hy=potenuse ein Quadrat. Der Beweis ist einerlei mit dem des Lehrsatzes.

Auch kann ein Grundsatz als Aufgabe vorgetragen wer=den, z. B. der vorhin erwähnte von Euklid aufgestellte Grund=satz kann als Aufgabe so dargestellt werden. An eine gerade Linie, und zwar an zwei gegebene Punkte derselben, solche Winkel zu setzen, daß die beiden andern Schenkel dieser Winkel, hinlänglich verlängert sich schneiden. Die Auflösung ist: Man setze zwei solche Winkel an die ge=gebenen Punkte der geraden Linie, welche man innere an einerlei Seite dieser Linie liegende nennt, und deren Sum=me kleiner als zwei rechte ist. Der Beweis ist mit dem des theoretischen Satzes einerlei. Ist der theoretische Satz ein wirklicher Grundsatz, so findet für ihn kein Beweis statt, folglich auch nicht für die Aufgabe, in die er verwan=delt worden ist. Wenn also der erwähnte Grundsatz des Euklid's kein ächter Grundsatz ist, so kann er auch in der Form einer Aufgabe den Beweis nicht entbehren. Aber in

ein Postulat, welches keine Auflösung, oder Bestimmung der Construction verstattet, kann ein Grundsatz auf keine Weise umgeformt werden. Sollte aber der Grundsatz in seiner Form gelassen, und so in die Rubrik der Postulate gesetzt werden, so macht diese unrichtige Stellung ihn nicht zum Postulat. Denn der Grundsatz fordert zwar auch etwas, wie das Postulat, aber etwas ganz von dem verschiedenes, was das Postulat fordert. Der Grundsatz nemlich fordert das Zugestehen der Richtigkeit seiner Behauptung von dem construirten Gegenstand, das Postulat hingegen fordert das Zugestehen der Möglichkeit der Construction.

Proklus, einer der ältesten Commentatoren der Elemente des Euklids, der 450 Jahre nach Christi Geburt lebte, und dessen Erklärungen über das erste Buch der Elemente noch vorhanden sind, setzte den von Euklid als eilften Grundsatz aufgestellten Satz unter die Lehrsätze, und versuchte einen Beweis davon zu geben. Er gründete diesen Beweis auf zwei Sätze. Der erste ist: wenn die beiden Schenkel eines Winkels immer mehr verlängert werden, so übertrift ihr Abstand jede gegebene Größe, so groß diese auch angenommen werden mag. Der zweite ist: wenn die eine von zwei Parallellinien von einer geraden Linie geschnitten wird, so wird auch die andere von dieser hinlänglich verlängerten geraden Linie geschnitten. Hierauf giebt er den Beweis des 11ten Grundsatzes des Euklids auf folgende Art: Wenn die beiden geraden Linien AB und CD von EF so geschnitten werden, (Fig. 1.) daß GKB + DGK kleiner als zwei rechte sind, so mache man EGH = GKB, so ist GH und AB parallel, (Euklid, 1 B. 28 Satz.) nun ist EGH + HGK = 2 R (als Nebenwinkel,) oder GKB + HGK = 2 R. Es ist aber GKB + DGK kleiner als 2 R, also ist GKB + DGK kleiner als GKB

+ HGK, folglich auch DGK kleiner als HGK, daher liegt GD zwischen GH und AB, da nun GH von GD, das heißt: von CD geschnitten wird, so wird auch AB, da sie mit GH parallel ist, von der Linie CD geschnitten.

Auf die Theorie des Proklus folgte die Theorie des gelehrten Persers Nassir-eddin Mahamat dessen Geburtsort die in der Landschaft Chorasan liegende Stadt Mesched war, und der in der Mitte des dreizehnten Jahrhunderts lebte. Nach ihm versuchte der Jesuit Christoph Clavius, in seiner 1594 herausgegebenen lateinischen mit Erläuterungen begleiteten Ausgabe der Elemente des Euklids einen ähnlichen Weg, diesen Grundsatz als Lehrsatz zu behandeln und zu beweisen. Von seinem Verfahren wird in der Folge mehr gesagt werden. Nach Clavius beschäftigten sich viele Mathematiker, einen evidenten Beweis dieses unächten Grundsatzes zu geben, wie z. B. Hausen, Kästner, Robert Simson, Segner, und auf ähnliche Art Lorenz u. s. w. mehrere suchten auch, ihn ganz zu umgehen, und ein von ihm unabhängiges System der Parallellinien aufzustellen. Daher geben manche von diesen, wie z. B. Wolf in seinen Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften und in seinem größern Werk in lateinischer Sprache, elementa matheseos universae, folgende Definition der Parallellinien: Zwei in der nemlichen Ebene befindliche geraden Linien, welche immer gleich weit von einander abstehen, sind parallele Linien. Allein bei dieser Ansicht hat nicht nur der Beweis des Lehrsatzes: wenn die Wechselswinkel, welche eine schneidende Linie mit zwei in einerlei Ebene liegenden geraden Linien macht, gleich sind, so sind diese geraden Linien parallel, das heißt, nach Wolf's Ansicht, äquidistant, Schwierigkeiten, sondern auch der Beweis, daß ausser diesen Parallellinien, die wegen ih-

rer Aequidistanz nicht zusammentreffen können, nicht noch eine andere Lage zweier in einerlei Ebene befindlichen geraden Linien möglich sei, so daß diese beiden Linien verlängert auch nicht zusammentreffen, ob sie gleich nicht äquidistant sind. Um diesen Anstand wegzuschaffen, muß man wieder zu dem Grundsatz Euklids zurückkehren. Die Bemühungen der Geometer um die Theorie der Parallellinien, sind vom Professor Klügel in seiner 1763 herausgegebenen Schrift: conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, in welcher er 28 Versuche aufzählt, gesammelt worden. Seit dieser Zeit haben sich noch viele Mathematiker mit dem System der Parallelen beschäftigt. Z. B. Karsten, in seinem Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien, Halle, 1778; Hindenburg, in seinem Aufsatz im Leipziger Magazin, unter der Rubrik: Neues System der Parallellinien, 1781; Schulz, in der Schrift: entdeckte Theorie der Parallelen, 1784, und in den Anfangsgründen der reinen Mathesis, 1790. Schulz gründet seinen Beweis des Grundsatzes des Euklid's auf den Satz: Die unendlich große Fläche eines größern Winkels ist größer als die unendlich große Fläche eines kleinern Winkels, und den Beweis dieses Satzes auf den Satz, gleiche Winkel sind congruent, und ihre unendlich großen Flächen sind gleichfalls congruent. So klar dieser Satz scheint, wenn man die gleichen Winkel gehörig aufeinander legt, und sich vorstellt, daß in dieser Lage die beiden Schenkel eines jeden dieser Winkel immer weiter ohne Ende fort verlängert werden, so undeutlich und zweifelhaft wird er wiederum, wenn man, wie Schulz thut, diese Schenkel nun wirklich als unendlich groß geworden, oder die unendlich verlängerten Schenkel als vollendet annimmt. Denn diese Vorstellungsart, welche durchaus

nicht für die Elementargeometrie gehört, ist nicht nur eine Fiction, weil eine gerade Linie, als vollendet vorgestellt, eben dadurch als begrenzt vorgestellt wird, also einen weitern Zuwachs zuläßt, folglich noch nicht unendlich groß ist, oder weil, wie in der Elementargeometrie schlechthin zum Voraus gesetzt wird, jede gegebene Größe als endliche Größe angesehen werden muß, sondern diese Fiction führt auch zu mehrern Widersprüchen. Es folgt nemlich, wie auch Schulz angiebt, daraus, daß alle unendlich großen geraden Linien, die blos nach einer Gegend zu ohne Ende fortgehen, gleich sind. Es sei aber eine gegebene gerade Linie B das Doppelte einer andern gegebenen geraden Linie A, so vielemal man nun A um ein Stück, das auch = A ist, verlängert, so vielemal verlängere man auch B um ein Stück, das = B ist, so wird das Vielfache der B immer das Doppelte des Gleichvielfachen der A seyn, so weit man auch die Verlängerung fortsetzt, d. h. bis in das Unendliche. Setzt man hier gleichfalls durch eine Fiction, A und B seien wirklich unendlich geworden, so ist die unendlich große Linie B das Doppelte der unendlich großen Linie A, welches dem Vorigen widerspricht. Ferner, wenn man mit Schulz annimmt, alle unendlich großen Linien, die blos nach einer Gegend ohne Ende fortgehen, seien gleich, und man setzt, die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels seien ohne Ende verlängert worden, so sind diese beiden Schenkel gleich, aber eben so ist auch die unendlich große gerade Linie, womit die Endpunkte dieser unendlich großen Schenkel verbunden worden sind, jedem der beiden unendlich großen Schenkel gleich, also entsteht durch diese unendlich große Construction ein gleichseitiges Dreieck, folglich hat jeder gegebene Winkel 60°, oder alle gegebenen Winkel sind gleich, welches ungereimt ist. Es ist also die Schulz'sche Theorie

der Parallelen auf keine evidenten Sätze errichtet, auch hat sie keinen Beifall gefunden. Ausserdem gehören seine Anfangsgründe der reinen Mathesis zu den besten der neuesten Lehrbücher der reinen Mathematik, und sind besonders wegen der Sonderung der Beweise für die Proportionen bei gezählten und absoluten Größen, (nach Euklid's Methode, aber auf eine weit leichtere Art dargestellt,) so wie wegen des lichtvollen Vortrags der Lehre von den entgegengesetzten Größen den Kästner'schen Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie weit vorzuziehen. Auch hat Kiesewetter in seinen Anfangsgründen der reinen Mathematik manches daraus mit Auswahl benützt, leider aber die Beweise der Lehrsätze der geometrischen Proportionen auf die Gleichheit der Producte der mittlern und äussern Glieder gegründet, welche Ansicht bei absoluten, nicht gezählten Größen, unstatthaft ist. Eine der Schulzischen ähnliche Theorie findet sich auch schon in der Schrift: Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques par Bertrand, Genève, 1778.

Ferner gehören zu den neuern Schriften, welche den Zweck haben, eine Theorie der Parallellinien aufzustellen, folgende: 1) Abhandlung über die Lehre der Parallellinien vom Professor von Kesaer, Wien, 1778; 2) Ueber die Parallellinien, in einem Schreiben an Hrn. Hofrath Karsten, von Lazarus Bendavid, 1786; 3) Commentatio mathematica, exhibens tentamen ex notione distincta et completa lineae rectae veritatem axiomatis XI. Euclidis demonstrandi, auctore I. H. Voigt; 4) Tentamen novae Parallelarum theoriae, auct. Schwab. Stuttgard, 1801; 5) Theorie der Parallelen, als Ankündigung eines neuen Versuchs über das Erkenntnißvermögen, von Ouvrier, 1808; 6) F. C. Schweikart's Theorie der Parallellinien,

1808; 7) Hoffmanns Kritik der Paralleltheorie, 1807; 8) Bürger's vollständige Theorie der Parallellinien, Karlsruhe, 1816; 9) Vollständige Theorie der Parallellinien, von Metternich, 1815. 10) Hauff's vier Versuche, u. s. f.

Das in gegenwärtigem Aufsatz dargestellte System der Parallelen setzt die Definition Euklid's von den Parallellinien voraus. Hierauf folgen Sätze, die in allen mathematischen Lehrbüchern als Grundsätze aufgestellt, und als solche allgemein anerkannt worden sind.

Der im 23. und 25. Satz dieser Theorie gegebene Beweis des 11ten Grundsatzes des Euklids, ist der vom Clavius in seinem Commentar der Elemente aufgeführte Beweis. Er hat diejenige Evidenz, die man von einem rein-geometrischen Beweis fordern kann, für jeden, der zugiebt, daß jede gegebene Größe eine endliche Größe ist, folglich weder unendlich groß noch unendlich klein seyn kann, welcher Satz bei den Beweisen in der Geometrie ohnedem zum vorausgesetzt wird, aber von manchem, der sich mit dem Calcul des Unendlichen beschäftigt, übersehen werden kann, weil man da gewöhnlich setzt, die unendliche Theilbarkeit des Raums sei vollendet, also die unendliche kleine Größe in der Anschauung dargestellt, oder bestimmt, oder gegeben. Eine Voraussetzung, welche im Grunde eine Fiction ist, und wer glaubt sich eine unendlich kleine gegebene Größe vorzustellen, täuscht sich, weil er sich entweder nur eine sehr kleine Größe, oder eine Größe, die = Null, das heißt: keine Größe ist, vorstellt. Wenn zum Beispiel in der Geometrie der Beweis des Satzes: in jedem Dreieck ACB, (Fig. 5.) ist die Summe zweier Winkel A und C kleiner als 2 R, vorgetragen wird, so ist er ganz evident, wenn man das gegebene Dreieck als endlich betrachtet. Nun stelle man sich vor, AB werde über B hin-

aus immer mehr verlängert, und zu beliebigen Punkten dieser Verlängerung die geraden Linien CE, CF u. s. f. gezogen, so ist die Summe der Winkel ACE und CAE den 2 R schon näher, die Summe der beiden Winkel ACF und CAF wiederum näher als die Summe der nächst vorhergehenden Winkel u. s. f. aber doch noch immer kleiner als 2 R. Man setze aber, die Verlängerung der AB ins Unendliche sei vollendet, so entsteht ein Dreieck, dessen eine Seite AC endlich, jede der beiden andern aber unendlich groß ist. Dieses Dreieck kann nicht gegeben seyn, es ist, als ein unendlich großes Dreieck, (welches nicht mit einem ausserordentlich großen Dreieck zu verwechseln ist,) eine blose Fiction, denn eine unendlich große Größe ist eine solche Größe, die größer ist als jede Größe, die sich angeben, bestimmen oder geben läßt, und gerade Linien, die sich erst schneiden, wenn sie ins Unendliche verlängert worden sind, schneiden sich eigentlich nirgends, also gar nicht.

Bei dem Beweis des 23sten Satzes dieser Theorie ist nun gleichfalls zu bemerken, daß jede gegebene Größe endlich ist, folglich, daß jede gegebene gerade Linie, und jeder gegebene Winkel, so klein sie auch seyn mögen, nicht unendlich klein sind. Dieses liegt auch schon im Begriff der unendlich kleinen Größe, als einer solchen, die kleiner ist als jede angebliche, bestimmte, oder gegebene Größe. Wenn also, (Fig. 16.) DGI + BIG kleiner als zwei rechte sind, und BIG ein rechter, folglich DGI ein spitziger Winkel ist, und beide gegeben, d. h. in der Anschauung dargestellt sind, so ist dieser spitzige Winkel immer angeblich kleiner als ein rechter. Denn man mache IGH = GIB = einem rechten Winkel, so ist nun der Winkel DGH gegeben, welcher, so klein er auch seyn mag, wiederum getheilt werden

kann, folglich nicht unendlich klein ist, sondern eine angebliche Grösse hat. So viel nun die Grösse dieses Winkels DGH beträgt, um so viel ist DGI kleiner als HGI, das heißt: als ein rechter Winkel, oder um diesen gegebenen Winkel weicht GD von der parallelen Lage ab. Nimmt man ferner auf CD (Fig. 13.) die endliche Linie GH von beliebiger Größe, und zieht HI senkrecht auf GK, so fällt die senkrechte HI vor dem spitzigen Winkel, (weil ausserdem ein Dreieck mit einem rechten und einem stumpfen Winkel entstünde, in welchem also die Summe zweier Winkel nicht kleiner wäre als zwei rechte,) das heißt: der Endpunkt I der senkrechten Linie HI liegt in der Linie GK zwischen den Punkten G und K, aber durch diesen Punkt I ist die Länge der geraden Linie GI bestimmt, oder gegeben, also ist GI endlich, d. h. so klein sie auch seyn mag, so kann sie doch wiederum getheilt werden, und ist also nicht unendlich klein. Nun ist die auf AB senkrechte Linie GK auch endlich. Denn die Linien CD und AB sind der Lage nach gegeben, und der Punkt G ist in der Linie CD auch bestimmt oder gegeben, folglich ist die Entfernung des Punktes G von der geraden Linie AB, welche durch die senkrechte GK ausgedrückt wird, gleichfalls gegeben, also endlich, folglich nicht unendlich groß. Daher wird sich ein Vielfaches der GI angeben lassen, welches die Länge der geraden Linie GK übertrift.

Blos für Anfänger in der Mathematik bemerke ich noch, daß wenn, (Fig. 13.) MN = MG = 2 GI, NR = NG = 2 MN = 4 GI, ferner die folgende Linie = RG = NR + NG = 2 NR = 8 GI, die folgende = 16 GI u. s. f. nemlich die folgende immer als das Doppelte der nächstvorhergehenden genommen wird, und GI nur der tausendste Theil eines Rheinländischen Decimalscrupels, oder ein Mil-

liontheilchen eines Rheinländischen Fußes ist, und man stellt sich dieses Auftragen nur vier und sechzigmal fortgesetzt vor, die auf diese Art entstandene Linie die gegebene Linie GI über achtzehn Trillionenmal enthalten wird, (welches Resultat aus der Theorie der geometrischen Progression hervorgeht,) folglich ist die erhaltene Linie über 18 Billionen Fuß lang. Nun ist die Sonne von der Erde 21 Millionen Meilen, (zu 24,000 Rheinl. Fuß gerechnet,) entfernt, oder eine halbe Billion Rheinl. Fuß, also ist die erhaltene Linie über dreißigmal so lang, als die Entfernung der Sonne von der Erde beträgt.

Der Beweis des 23sten Satzes ist übrigens, wie ich schon bemerkt habe, nach Clavius ausgeführt. In diesem Beweis ist nun vorausgesetzt, daß (Fig. 13.) in dem Viereck IQLM, in welchem QIM und IQL rechte Winkel, und die gegenüberstehenden Seiten IM und QL gleich sind, auch IML und QLM rechte Winkel sind. Um die Wahrheit dieses Satzes darzuthun, giebt Clavius zweierlei Beweise, wovon der eine zwar richtig, aber nicht hinlänglich evident; der zweite aber unzureichend, und im Allgemeinen betrachtet, unrichtig ist. (Siehe Hoffmanns Critik der Paralleltheorien, Seite 15 und 16, und Seite 263 und 264.) In gegenwärtiger Schrift soll nun der 18. Satz diese Schwierigkeit heben. Ich mache daher in Beziehung auf die Art seines Beweises, in so ferne sich derselbe zum Theil auf das in der reinen Anschauung dargestellte, in der Erklärung der geraden Linie aber ausgesprochene Merkmal der gleichförmigen Lage aller Theile derselben, gründet, zum Theil aber auf der reinen, dem Begriff der senkrechten Linie, als Maas der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie, gemäßen Anschauung beruht, folgende Bemerkungen, welche die Richtigkeit meiner Ansicht

bestät-

bestättigen werden. Der bekannte eilfte Grundsatz des Euklids setzt als evident voraus, daß zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien, die sich nähern, auch verlängert sich schneiden werden. Die Evidenz der Richtigkeit dieser Behauptung aber, in so ferne sie schon, nach Euklids Ansicht, unmittelbar in der, dem Begriff der geraden Linien gemäßen reinen Anschauung liegen soll, ist von vielen Mathematikern in Anspruch genommen worden. Wenn daher Nassireddin in seiner Theorie der Parallelen, statt dieses Euklidischen Grundsatzes folgenden aufstellt: Wenn zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien AB und CD, (Fig. 20.) von denen CD ganz an einerlei Seite der AB liegt, von einer geraden Linie CH so geschnitten werden, daß BHC ein rechter, aber DCH ein spitziger Winkel ist, so nähern sie sich immer fort, je weiter sie über B hinaus verlängert werden, (indem aber noch unentschieden bleibt, daß sie sich endlich auch schneiden werden,) so ist dieser Satz offenbar einfacher als Euklids Grundsatz. Fügt man nun den Satz hinzu, daß die aus beliebigen Punkten der CD auf AB senkrecht gezogenen Linien das Maas der Entfernungen dieser Punkte von der AB sind, so ergiebt sich folgender Satz: Wenn die erwähnten AB und CD von der CH so geschnitten werden, daß CHB ein rechter, und HCD ein spitziger Winkel ist, so ist die senkrechte FG kleiner als die senkrechte CH, und so ferner nach B zu, jede folgende senkrechte kleiner als die vorhergehende. Allein man kann evident erweisen, daß wenn (Fig. 18.) BKE ein rechter, aber KGD ein spitziger Winkel ist, derjenige Punkt der geraden CD, auf welchen die aus dem Durchschnittspunkt K auf CD senkrecht gezogene KI trift, (welche vor dem spitzigen Winkel KGD liegen muß,) der AB näher liege als der Punkt G, und

folglich die gerade Linie, welche man aus I senkrecht auf AB zieht, kleiner ist, als die senkrechte GK. Denn im rechtwinklichen Dreieck GIK ist die Hypotenuse KG größer als die Kathete KI, d. h. KI ist kleiner als KG, und eben so kann man zeigen, daß die aus I auf AB senkrecht gezogene Linie kleiner ist als KI, auch kleiner als KG. Nun können diese Sätze so geordnet werden:

Erster Satz. Wenn (Fig 2.) irgend ein Punkt F in der CD näher an der in der nemlichen Ebene befindlichen geraden Linie AB liegt als der Punkt C, so liegt jeder folgende Punkt in der CD, z. B. D, auch der AB näher als der Punkt F, oder wenn sich der Raum zwischen zwei in einerlei Ebene befindlichen geraden Linien verengt, so verengt er sich immer fort, je weiter sie verlängert werden. (Dieses ist ein Grundsatz, weil er blos die Aussage des in der reinen Anschauung dargestellten Merkmals der Gleichförmigkeit in der Lage einer geraden Linie gegen eine andere gerade Linie ist.)

Zweiter Satz. Wenn (Fig. 18.) AB und CD von EF so geschnitten werden, daß EKB ein rechter, und DGK ein spitziger Winkel ist, so liegt der durch die senkrechte KI bestimmte Punkt I näher an der AB als der Punkt G. (Dieses ist ein Lehrsatz, dessen Beweis vorhin gegeben wurde.)

Dritter Satz. Wenn (Fig. 7.) die senkrechte FG kleiner als die senkrechte CH ist, so ist auch jede nach D zu folgende, auf AB senkrechte Linie, (z. B. DE) kleiner als FG. (Dieses ist ein Lehrsatz, und zwar der 18te Satz dieser Theorie.) Also auch, wenn FG größer ist als DE, so ist auch jede folgende auf AB senkrechte, z. B. CH, größer als FG.

Vierter Satz. Wenn (Fig. 7.) CD und AB von CH so geschnitten werden, das CHB ein rechter, und HCD ein spitziger Winkel ist, so nähern sie sich immer fort nach B zu. Beweis. Es giebt eine gewisse senkrechte FG, die kleiner als CH ist, (2. Satz.) daher ist auch (nach dem 3. Satz.) die von einem folgenden Punkt (z. B. D) der CD auf AB senkrecht gezogene Linie kleiner als FG, folglich ist der Punkt D der AB näher als der Punkt F, u.s.f. (Diesen Lehrsatz hat Nassireddin als Grundsatz aufgestellt.)

Dieser vierte Satz ist also zusammengesetzter als der dritte, und setzt diesen nebst dem ersten und zweiten voraus. Der dritte Satz aber ist der in dieser Theorie aufgestellte 18. Satz, und beruht blos auf dem ersten Satz, welches der einfachste ist, und daher in dieser Theorie (Seite 25) als Grundsatz aufgeführt wird. Es läßt sich nemlich genügend darthun, daß dieser erste Satz unmittelbar aus dem in der reinen Anschauung dargestellten, (construirten) Begriff der geraden Linien gefolgert, und daher keines Beweises fähig ist, sondern jedem versuchten Beweise desselben schon zum Grunde liegt. Es scheint wohl, daß wenn (Fig. 3.) erwiesen wird, daß die Verlängerung der geraden Linie CD, die mit der geraden AB den einzigen Punkt D gemeinschäftlich hat, jenseits der AB liegt, wenn CD diesseits der AB liegt, und folglich nicht nach DF fallen kann, als würde wirklich bewiesen, daß wenn der Punkt D z. B. tiefer liegt als der Punkt C, der Punkt E auch tiefer liegen müße als der Punkt D. Allein dieses ist nur zu erweisen, wenn man schon voraussetzt, daß wenn der Theil AD der AB so liegt, daß der Punkt D tiefer liegt als der Punkt A, auch B tiefer liege als D, oder wenn AD z. B. horizontal liegt, auch DB horizontal liege. Denn man nehme an, statt ADB sei

ADG eine gerade Linie, so daß DG die Verlängerung der geraden AD ist, so läßt sich nun die Unmöglichkeit, daß DF die Verlängerung der CD sei, nicht darthun, denn auch so liegt CD diesseits und DF jenseits der ADG, und die Winkel ADC und GDF sind die Wechselswinkel. Nur das kann immer bewiesen werden, daß die Verlängerung der CD nicht zwischen AD und deren Verlängerung, diese sei nun DB oder DG oder irgend eine andere Linie, liegen kann, wobei also die Lage der Verlängerung der AD unbestimmt bleibt. Also wird die wahre Lage dieser Verlängerung der AD, als der Lage der AD direct entgegengesetzt, in der reinen Anschauung, dem Begriff der gleichförmigen Lage aller Theile einer geraden Linie gemäß dargestellt, schon vorausgesetzt. Eben so setzt die Anschauung eines rechten Winkels, die Anschauung der Gleichförmigkeit in der Lage der Theile der senkrechten und der Theile derjenigen geraden Linie, auf der sie steht, zum Voraus. Denn in was sollte sonst der Grund liegen, daß (Fig. 11.) die gleichen neben einander befindlichen Winkel EGL und HGL rechte, die gleichen, auch neben einander befindlichen Winkel p und q aber keine rechten Winkel genannt werden, als darinn, daß die Theile EG und GH gleichförmig liegen, EF und FH aber nicht. Man möchte zwar sagen, es ließe sich doch beweisen, daß bei einem geradlinigen Winkel diejenigen Punkte eines Schenkels, die der Winkelspitze näher liegen, auch dem andern Schenkel näher liegen, wie z. B. Clavius gezeigt hat. Allein der erwähnte Beweis wird vermittelst construirter Dreiecke gegeben, deren Seiten selbst Schenkel geradliniger Winkel sind, die geradlinigen Winkel und folglich die Dreiecke sind aber gar nicht zu construiren, wenn man nicht den zu beweisenden Satz voraussetzt, weil ein geradliniger Winkel durch die gegenseitige Lage eines

beliebigen in jedem Schenkel angenommenen Theils desselben gegeben oder bestimmt ist. Ferner wie wäre, ohne den erwähnten Grundsatz, ein Dreieck von einem andern Vieleck in der reinen Anschauung zu unterscheiden, da ohne ihn alle Constructionen der geraden Linien regellos sind, und nur allein durch die nicht zureichende Bedingung beschränkt werden, daß zwei verschiedene gerade Linien nicht zwei Punkte gemeinschäftlich haben, aber übrigens der Willkühr überlassen ist, ob man sich solche als sich nähernd, dann wieder von einander entfernend und wiederum sich nähernd u. s. w. vorstellen will. Wenn also der Winkel NPC (Fig. 13.) gegeben ist, so ist es klar, daß wenn ein Punkt H des Schenkels CP näher gegen die Winkelspitze P zu liegt, als ein anderer Punkt, z. B. G dieses Schenkels, der Punkt H auch dem andern Schenkel NP näher ist als der Punkt G, und so auch der Punkt L näher dem Schenkel NP als der Punkt H, weil der Raum zwischen den Schenkeln GP und NP sich immerfort verengt, bis endlich der Punkt P in den Schenkel NP selbst fällt. Da nun durch die Lage des Theils GH gegen die NP die Lage der ganzen geraden Linie GP gegen die NP gegeben ist, so ist es auch klar, daß wenn GH nach NP zu verlängert wird, und der Punkt H der NP näher ist als der Punkt G, auch jeder Punkt der Verlängerung dieses Theils gegen NP zu, der NP näher ist, als der Punkt H. Wenn nun GH um den Punkt G so gedreht wird, daß der Winkel NGH größer wird, so ist auch alsdann noch der Punkt L der NP näher als der Punkt H, so lange der Punkt H der NP näher ist als der Punkt G. Aber es entsteht die Frage, ob GH bei dieser Drehung endlich nicht in eine solche Lage gegen die NP oder die NO kommen kann, daß GH und NO sich nicht schneiden, so weit auch beide verlängert werden, und

demohngeachtet noch der Punkt H der NP näher als der Punkt G, und folglich der Punkt L auch der NP näher als der Punkt H ist. Dieses ist die Schwierigkeit, welche bei der Theorie der Parallellinien gehoben werden muß, und dieses wird auch in gegenwärtiger Abhandlung mit voller Evidenz am gehörigen Ort geleistet. So viel über den von mir aufgestellten Grundsatz, und ich füge blos die literärische Bemerkung hinzu, daß Robert Simson seine Parallelentheorie zwar auf einen ähnlichen, aber nicht hinlänglich genau bestimmten Grundsatz stützt, so daß es scheint, als setze er die hier noch problematische reale Möglichkeit des Parallelismus und des Durchschneidens zweier convergenten geraden Linien schon als ausgemacht voraus.

Was endlich noch die in gegenwärtiger Schrift angenommene Definition der Parallellinien, (welche die von Euklid gegebene ist,) betrift, so halten sie viele für eine negative Erklärung, weil sie, nach ihrer Meinung, die Natur der Parallelen nicht durch ein wirkliches oder positives Merkmal bestimmt, sondern deren Eigenthümlichkeit blos auf die Unmöglichkeit des Durchschnitts dieser Linien, folglich auf ein verneinendes oder negatives Merkmal beschränkt. Allein, ohne hier zu untersuchen, ob ein Satz, in welchem dem Subject ein positives Prädicat abgesprochen wird, von einem Satz, in welchem dem Subject ein negatives Prädicat beigelegt wird, nicht wesentlich verschieden sei, behaupte ich nur, daß die Euklidische Definition ein logisch bejahender Satz, mit einem positiven Prädicat ist, wenn sie in folgender Form ausgesprochen wird:

Parallele Linien heißen solche in einerlei Ebene befindliche gerade Linien, von welchen alle Punkte der einen ausserhalb an der nemlichen Seite der andern liegen, so weit man auch die Linien vor- oder rückwärts verlängern

mag. Folglich, da in jeder ächten Definition Prädicat und Subject identisch sind, also ohne Nachtheil der Gültigkeit des Satzes versetzt werden können; so sind umgekehrt: solche in einerlei Ebene befindliche gerade Linien, von welchen alle Punkte der einen ausserhalb an einerlei Seite der andern Linie liegen, u. s. f. parallele Linien.

Hingegen sind solche in einerlei Ebene befindliche gerade Linien, die, wenn sie hinlänglich verlängert werden, etwas gemeinschäftliches haben, nicht parallele Linien. Dieses ist der contraponirte Satz, und wird so bewiesen: Gesetzt diese Linien seien parallele Linien, so liegen alle Punkte der einen ausserhalb an der nemlichen Seite der andern, (nach der Definition,) folglich findet sich zwischen ihnen ein vor- und rückwärts unbegrenzter Raum, dieses ist aber gegen die Voraussetzung.

In Hoffmanns Critik der Paralleltheorie lassen sich die (Seite 234) von ihm angeführten Bedenklichkeiten dadurch leicht heben.

Theorie der Parallellinien.

Erster Satz.

Erklärung. (Fig. 2.)

Eine Linie CD, deren Lage in einer Ebene durch die Lage zweier in ihr beliebig angenommenen Punkte C und F bestimmt wird, so daß die Lage dieser beiden angenommenen Punkte auch die Lage aller übrigen möglichen Punkte der Linie CD und ihrer Verlängerung über C und D hinaus auf eine gleichförmige Art bestimmt, heißt: eine gerade Linie.

Zweiter Satz.

1) Grundsatz.

Jeder Theil einer gegebenen geraden Linie ist also selbst eine gerade Linie, der mit der ganzen gegebenen geraden Linie eine gleichförmige Lage hat, und alle möglichen Theile einer geraden Linie haben eine gleichförmige Lage in der Ebene, in welcher sich die ganze gerade Linie befindet.

2) Zusatz.

Wenn also zwei gerade Linien zwei Punkte gemeinschäftlich haben, so fallen nicht nur die zwischen diesen bei-

den gemeinschäftlichen Punkten befindlichen Theile der beiden geraden Linien zusammen, sondern auch die beiden geraden Linien, so wie ihre Verlängerungen fallen in einander, oder zwischen zwei gegebenen Punkten ist nur eine einzige gerade Linie möglich.

Dritter Satz.

Erklärung. (Fig. 2.)

Wenn zwei gerade Linien AB und CD in der nemlichen Ebene befindlich sind, so heißt die Lage der geraden Linie CD in dieser gemeinschäftlichen Ebene, in so fern sie mit der Lage der geraden Linie AB in der nemlichen Ebene verglichen wird, die Lage der geraden Linie CD gegen die gerade Linie AB.

Vierter Satz.

Grundsatz. (Fig. 2.)

Wenn zwei gerade Linien AB und CD in der nemlichen Ebene befindlich sind, und die eine ganz an der nemlichen Seite der andern liegt, und es ist irgend ein zwischen den Endpunkten C und D gegebener Punkt F in der CD, der AB näher als der eine Endpunkt C, so ist auch der andere Endpunkt D, der AB näher als der Punkt F. Das heißt: der zweite Theil FD hat eine solche Lage gegen die AB, die der Lage des ersten Theils CF gegen diese AB gleichförmig ist, und umgekehrt: wenn F von AB entfernter ist als der Endpunkt C, so ist auch der zweite Endpunkt D von AB entfernter als der zwischen C und D gegebene Punkt F.

Fünfter Satz.

Forderung.

Von einem gegebenen Punkt zu einem andern gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen.

Sechster Satz.

Forderung.

Wenn zwei gerade Linien von ungleicher Länge, nemlich eine gerade Linie B und eine kleinere gerade Linie A gegeben sind, auf eine dritte, der Lage nach gegebenen geraden Linie C die gerade Linie A so vielmal aufzutragen, daß dieses Vielfache der geraden Linie A größer ist, als die gegebene gerade Linie B.

Anmerkung.

Dieser Satz wird von Euklid häufig angewendet, und folgt aus dessen vierter Erklärung des fünften Buchs seiner Elemente: Zwei Größen sind im Verhältniß, wenn das Vielfache der kleinern die größere übertreffen kann. Denn da die beiden Größen des Verhältnisses als gegeben betrachtet werden, so haben sie beide eine bestimmte Größe, oder sie sind endlich.

Siebenter Satz.

Erklärung.

Ein hohler Winkel heißt derjenige geradlinige Winkel, der kleiner als die Summe zweier rechten Winkel ist.

Achter Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie eine andere gerade Linie schneidet, so hat sie mit ihr nur einen einzigen Punkt gemeinschäftlich.

Beweis.

Gesetzt sie habe mit ihr zwei Punkte gemeinschäftlich, so fällt sie ganz in dieselbe, (2. Satz.) also schneidet sie solche nicht. Dieses ist aber gegen die Voraussetzung.

Neunter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 3.)

Wenn eine gerade Linie CD mit einer andern geraden Linie AB einen einzigen Punkt D gemeinschäftlich hat, so schneidet sie die AB, wenn sie an diesem Punkt verlängert wird, so daß ein Theil diesseits und ein Theil jenseits der AB liegt.

Beweis.

Gesetzt, die gerade Linie CD, die mit der AB den Punkt D gemeinschäftlich hat, schneide, wenn sie verlängert wird, die AB nicht so, daß ein Theil diesseits der andere jenseits der AB liegt, so sind folgende zwei Fälle möglich:

1) Die Verlängerung DE falle in AB, so hat CD mit AB mehr als einen Punkt gemeinschäftlich. Dieses ist aber gegen die Voraussetzung.

2) Die Verlängerung DE der geraden Linie CD falle an diejenige Seite der AB, an welcher die gerade Linie CD liegt, zwischen BD und DC, z. B. nach F zu, so daß DF diese Verlängerung, also CDF eine gerade Linie sey. Man ziehe DG, zwischen DC und DF. Nun ist ADG + GDB zweien rechten Winkeln gleich, als Nebenwinkel an der geraden Linie AB, (Euklid, 1. Buch, 13. Satz.) aber CDG ist ein Theil des Winkels ADG, also kleiner als ADG, folglich ist CDG + GDB kleiner als zwei rechte Winkel, und da GDF ein Theil des Winkels GDB, also kleiner als GDB ist, so ist auch CDG + GDF, d. i. CDF kleiner als zwei rechte. Daher ist DF nicht die Verlängerung der geraden Linie CD, denn wäre dieses, folglich CDF eine gerade Linie, so wäre CDG + GDF zweien rechten Winkeln gleich. (Euklid, 1. B. 13. Satz.)

Zusatz.

Da BDC, von G aus betrachtet, ein hohler Winkel ist, dessen Schenkel CD und BD sind, so folgt, daß wenn der eine Schenkel, z. B. CD verlängert wird, dessen Verlängerung nicht zwischen die Schenkel CD und DB fällt, d. h. nicht nach F zu, sondern über den Winkelpunkt D hinaus, nach E zu.

Zehnter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 4.)

Wenn die beiden Endpunkte C und D einer geraden Linie CD an einerlei Seite einer in der nemlichen Ebene befindlichen geraden Linie AB liegen, so liegt die gerade

Linie CD ganz an einerlei Seite der AB, nemlich an der, an welcher die beiden Endpunkte C und D liegen.

Beweis.

Erster Fall. Gesetzt, ein Punkt I der geraden Linie CD liege an der andern Seite der AB, oder ihrer Verlängerung. Man ziehe CI und DI. Weil nun die Punkte C und I in der Linie CD liegen, so liegt CI selbst in der Linie CD, (2. Satz.) eben so liegt DI in der CD, weil die Punkte D und I in der CD liegen, also stellt die Linie CID die Lage der geraden Linie CD gegen AB für diesen ersten Fall vor, oder CID ist eine gerade Linie. Sie hat aber mit der geraden Linie AB oder deren Verlängerung zwei Punkte L und M gemeinschäftlich, also fällt sie in AB, (2. Satz.) folglich fallen auch ihre Endpunkte C und D in die gerade Linie AB, oder in deren Verlängerung. Dieses ist aber gegen die Voraussetzung, nach der die Punkte C und D ausserhalb der geraden Linie AB liegen.

Zweiter Fall. Gesetzt, ein einziger Punkt P der geraden Linie CD liege in AB, oder in der verlängerten AB, so daß CPD die Lage der CD gegen die AB für diesen Fall vorstellt, so ist CP der eine Theil der CD, und der zweite Theil PD muß als Verlängerung der CP betrachtet werden. Nun fällt diese Verlängerung PD an diejenige Seite der AB, an der die gerade Linie CP liegt. Dieses ist aber unmöglich. (9. Satz, 2. Fall.)

Da also kein Punkt der geraden Linie CD an der andern Seite der AB, oder in AB und deren Verlängerung liegen kann, so liegt CD ganz an derjenigen Seite der AB, an welcher ihre beiden Endpunkte C und D liegen.

Eilfter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 5.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ACE ist nur ein einziger rechter Winkel ACE, die beiden andern Winkel A und E aber sind spitzige Winkel.

Beweis.

Man verlängere AC nach D. Da ACE ein rechter Winkel ist, so ist der Nebenwinkel ECD auch ein rechter Winkel. (Euklid, 1. B. 13. Satz.) Nun ist ECD, als äusserer Winkel, größer als E und als A. (Euklid, 1. B. 16. Satz.) Daher ist der Winkel A sowohl als der Winkel E, kleiner als ein rechter Winkel, folglich ist jeder von den Winkeln A und E ein spitziger Winkel. Folglich ihre Summe kleiner als zwei rechte Winkel.

Zwölfter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 6.)

Von einem ausserhalb der geraden Linie AB gegebenen Punkt C ist auf die der Lage nach gegebene gerade Linie AB nur eine einzige senkrechte Linie CD möglich.

Beweis.

Da CD nach der Voraussetzung senkrecht auf AB ist, so ist CDE ein rechter Winkel. Nun sei die gerade Linie CE aus dem Punkt C gleichfalls auf AB senkrecht, so ist CED auch ein rechter Winkel. Also ist in dem Dreieck DCE mehr als ein rechter Winkel, welches unmöglich ist. (11. Satz.)

Dreizehnter Satz. (Fig. 6.)

Die senkrechte Linie CD ist die kürzeste unter allen geraden Linien, welche von dem ausserhalb der geraden Linie AB befindlichen Punkt C zu beliebigen Punkten der geraden Linie AB gezogen werden.

Beweis.

Es sei ausser der senkrechten Linie CD vom Punkt C eine gerade Linie CE zu irgend einen vom Punkt D verschiedenen Punkt E der geraden Linie AB gezogen, so entsteht das Dreieck DCE, in welchem CDE ein rechter, folglich CED kleiner als ein rechter Winkel ist. (11. Satz.) Nun steht dem größern Winkel CDE die größere Seite gegenüber, (Euklid, 1. B. 19. Satz.) also ist CE größer als die senkrechte CD, folglich CD kleiner als CE.

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 6.)

Die von dem ausserhalb der geraden Linie AB befindlichen Punkt C auf AB senkrecht gezogne Linie CD bestimmt die Entfernung des Punktes C von der geraden Linie AB.

Beweis.

Die Entfernung eines Punktes C von einer geraden Linie AB wird durch die kürzeste gerade Linie bestimmt, welche von diesem Punkt zur geraden Linie AB gezogen werden kann. Die vom Punkt C auf AB senkrechte CD ist aber die kürzeste von allen geraden Linien, die von dem nemlichen Punkt C zu der geraden Linie AB gezogen wer-

den können, (13. Satz.) also bestimmt sie die Entfernung oder den Abstand des Punktes C von der geraden Linie AB.

Zusatz. (Fig. 7.)

Wenn also die Entfernung des Punktes F von der geraden Linie AB kleiner ist als die Entfernung des Punktes C von dieser geraden Linie AB, d. h. wenn der Punkt F näher bei der geraden Linie AB liegt, als der Punkt C, so ist die aus dem Punkt F auf AB gezogene senkrechte Linie FG kleiner als die aus dem Punkt C auf AB gezogene senkrechte CH, und umgekehrt, wenn die senkrechte FG kleiner ist als die senkrechte CH, so ist der Punkt F näher bei AB als der Punkt C.

Funfzehnter Satz.

Erklärung.

Zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien, die, so weit man sie verlängert, nach keiner Gegend zusammentreffen, heißen: parallele Linien.

Anmerkung.

Dabei bleibt noch unentschieden, ob nicht zwei Arten Parallellinien möglich sind, erstens gleichweitabstehende, das heißt: solche, die in allen Punkten gleiche Entfernung von einander haben, nemlich bei denen alle, von beliebigen Punkten der einen auf die andere Parallellinie gezogenen senkrechten Linien gleich sind, und ferner solche, bei denen die gedachten senkrechten Linien, nach der Ordnung, wie sie nach einerlei Gegend zu, auf einander folgen, immer kleiner werden, jedoch so abnehmen, daß wenn die eine Parallellinie in eine beliebige gleiche Anzahl Theile getheilt wird, und aus den Theilungspunkten senkrechte Linien auf die an-

dere

dere Parallellinie gezogen werden, der Unterschied der senkrechten Linie B und der nächstfolgenden C kleiner ist als der Unterschied dieser senkrechten Linie B und der nächstvorhergehenden senkrechten Linie A u. s. f., so daß, je weiter die beiden Parallellinien verlängert werden, die entferntern Theile derselben sich immer mehr der gleichweitabstehenden Lage nähern, folglich die beiden Parallellinien sich aneinander hinschleifen, ohne einander irgendwo zu treffen, wie die Asymptote an der Hyperbel. Z. B. Es sei Fig. 10. CH = 1, der Unterschied zwischen CH und DI = $\frac{1}{2}$, zwischen DI und EK = $\frac{1}{4}$, zwischen EK und FL = $\frac{1}{8}$ u. s. f., ferner HI = IK = KL u. s. f. so ist, (da CH = 1,) DI = $\frac{1}{2}$, EK = $\frac{1}{4}$, FL = $\frac{1}{8}$, kurz die auf AB in gleichen Weiten stehenden senkrechten Linien bilden eine abnehmende geometrische Progression, in der das erste Glied = 1, der Exponent = $\frac{1}{2}$ ist. Wenn also die Anzahl der Glieder = n ist, so ist das letzte Glied $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. So weit man also die Linie CG fortsetzt, so ist immer die auf AB senkrechte = $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, folglich nicht Null, daher trift CG, noch so weit verlängert, nicht mit AB zusammen, ist also mit AB parallel. Ob nun diese zwei Arten der Parallellinien, oder nur eine Art, und welche Art, möglich ist, wird in der Folge mit voller Evidenz entschieden werden.

Sechszehnter Satz.

Lehrsatz.

Zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien, die nicht parallel sind, treffen, wenn sie hinlänglich verlängert werden, zusammen.

Beweis.

Gesetzt, sie treffen, so weit sie auch verlängert werden, nach keiner Gegend zusammen, so sind sie parallel, (15. Satz.) welches der Voraussetzung widerspricht.

Siebzehnter Satz.

Lehrsatz.

Zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien, die, hinlänglich verlängert, zusammentreffen, sind nicht parallel.

Beweis.

Denn gesetzt, sie sind parallel, so treffen sie, wenn man sie noch so weit verlängert, nach keiner Gegend zusammen, (15. Satz, Definition.) dieses widerspricht aber der Voraussetzung.

Anmerkung.

Diese Beweisart ist streng logisch, und gründet sich auf den Satz, daß jede Definition schlechthin umgekehrt werden darf. Der 16. Satz ist der im 15. Satz gegebenen Definition der Parallellinien contraponirt, und seine Richtigkeit wird vermittelst dieser Definition indirect bewiesen. Der 17. Satz ist der umgekehrte contraponirte 16. Satz, und seine Wahrheit wird vermittelst des umgekehrten 15. Satzes, (Parallellinien treffen verlängert nicht zusammen,) indirect gezeigt.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 7.)

Wenn eine gerade Linie CD in einerlei Ebene mit der geraden Linie AB befindlich ist, und ihre beiden Endpunkte C und D an der nemlichen Seite der AB liegen, folglich die ganze gerade Linie CD an der nemlichen Seite der AB liegt, (10. Satz.) und es ist die, von dem mitten

zwischen den Endpunkten C und D liegenden Punkt F auf AB senkrecht gezogene gerade Linie FG kleiner, als die aus dem ersten Endpunkt C auf AB gezogene senkrechte CH, so ist auch die aus dem folgenden Endpunkt D auf AB senkrecht gezogene DE kleiner als die senkrechte FG. Und wenn die senkrechte FG größer ist, als die, aus dem als ersten Endpunkt angenommenen Punkt D auf AB senkrecht gezogene DE, so ist auch die aus dem folgenden Endpunkt C auf AB senkrecht gezogene CH, größer als die senkrechte FG.

Beweis.

Wenn der zwischen den Endpunkten C und D gegebene Punkt F in der geraden Linie CD, (Fig. 7.) gegen die gerade Linie AB näher zu liegt als der erste Endpunkt C, so liegt der zweite Endpunkt D auch an AB näher, als dieser Punkt F. (4. Satz.) Mit andern Worten heißt dieß: Wenn die Entfernung des Punktes F von der geraden Linie AB kleiner ist, als die Entfernung des ersten Endpunktes C, so ist auch die Entfernung des zweiten Endpunktes D von AB kleiner, als die Entfernung des Punktes F. Da nun CH, FG und DE aus den Punkten C, F und D auf AB senkrecht gezogen sind, so ist, wenn FG kleiner als CH ist, auch DE kleiner als FG. (14. Satz, Zusatz.) Und umgekehrt, ist FG größer als DE, so ist auch CH größer als FG. (4. S. und 14. Satz.)

Anmerkung.

Hiebei wird blos im Allgemeinen behauptet, daß die Abnahme oder Zunahme der gedachten drei senkrechten Linien nach dem Gesetz des in der Anschauung dargestellten Begriffs der geraden Linie erfolge, das Verhältniß aber des Unterschieds zwischen DE und FG, zum Unterschied zwischen FG

und CH ist noch unbekannt. Daher wird auch unbestimmt gelassen, ob CD, hinlänglich verlängert, die AB schneiden werde, oder nicht.

Neunzehnter Satz.

Erklärung. (Fig. 8.)

Wenn zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien AB und CD von einer geraden Linie FG geschnitten werden, so entstehen mehrere Winkel, die in Beziehung auf die beiden gegebenen geraden Linien AB und CD, in Verbindung mit der schneidenden geraden Linie FG, eigene Namen erhalten. Nemlich diejenigen Winkel, welche die schneidende Linie FG mit den beiden Linien AB und CD innerhalb dieser beiden Linien bildet, das heißt: die Winkel z, x, w und y werden innere Winkel genannt, hingegen diejenigen Winkel, welche eben diese schneidende Linie FG mit den beiden Linien AB und CD ausserhalb dieser beiden Linien bildet, z. B. m, n, p und q, heißen äussere Winkel. Diejenigen der innern Winkel, von denen der eine diesseits, der andere jenseits der schneidenden Linie FG liegt, nemlich z und y, oder x und w, heißen innere Wechselwinkel, und diejenigen der äussern Winkel, von denen der eine diesseits, der andere jenseits der schneidenden Linie FG liegt, nemlich m und q, oder n und p, heißen äussere Wechselwinkel. Die beiden innern Winkel w und z, oder die beiden innern Winkel x und y, heißen innere an einerlei Seite der schneidenden Linie liegende Winkel, aber die beiden äussern Winkel m und p, oder die beiden äussern Winkel n und q, heißen äussere an einerlei Seite der schneidenden Li-

nie liegende Winkel. Ferner kann man auch einen äussern Winkel mit dem gegenüberstehenden, an der nemlichen Seite der schneidenden Linie liegenden innern Winkel vergleichen, nemlich m mit w, n mit y, p mit z, und q mit x. Endlich einen äussern Winkel mit dem an der andern Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel, z. B. m mit y, n mit w, p mit x und q mit z.

Zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 8.)

Wenn zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien AB und CD, welche nicht parallel sind, von einer geraden Linie FG geschnitten werden, so ist die Summe der beiden innern Winkel x und y, welche an einerlei Seite der schneidenden Linie FG, und zwar nach derjenigen Gegend zu liegen, nach welcher die nicht parallelen Linien AB und CD hinlänglich verlängert zusammentreffen werden, kleiner als zwei rechte Winkel, aber die Summe der beiden an der andern Seite der schneidenden Linie FG liegenden innern Winkel w und z größer als zwei rechte Winkel. Ferner ist der äussere Winkel n größer als der innere gegenüberstehende Winkel y, und der äussere Winkel q größer als der innere gegenüberstehende Winkel x. Aber der äussere Winkel m ist kleiner als der innere gegenüberstehende Winkel w, und der äussere Winkel p kleiner als der innere gegenüberstehende Winkel z.

Beweis.

Da AB und CD, nach der Voraussetzung, nicht parallel sind, so treffen sie, hinlänglich verlängert, nach einer Gegend zu zusammen, (16. Satz.) dieses geschehe im Punkt E.

Nun ist die so entstehende Figur ein Dreieck, also 1) die Summe der beiden innern Winkel x und y dieses Dreiecks kleiner als zwei rechte Winkel. (17. S. 1. B. Euklid.) Ferner ist

$x + z = 2R$ (als Nebenwinkel,)

eben so $w + y = 2R$

folglich $x + y + w + z = 4R$,

davon weggenommen $x + y$, welche Summe kleiner als $2R$ ist, so ist

2) der Rest $w + z$ größer als zwei rechte Winkel.

3) Ferner ist der äussere Winkel n größer als der ihm gegenüberstehende innere Winkel y, nach dem 16. Satz, 1. B. in Euklid's Elementen.

4) Nach dem nemlichen Satz ist auch der äussere Winkel q größer als der gegenüberstehende innere Winkel x.

5) Ferner ist $w = q$ als Scheitelwinkel,
also auch w größer als x,
daher ist x kleiner als w.

6) Da aber die Winkel x und m Scheitelwinkel, folglich gleich sind, so ist auch der Winkel m kleiner als der Winkel w.

7) Nun war n größer als y,
aber es ist $n = z$ (als Scheitelwinkel,)
also ist auch z größer als y,
oder y kleiner als z.

8) Endlich, da $p = y$ (als Scheitelwinkel,) so ist auch der Winkel p kleiner als der innere gegenüberstehende Winkel z.

Ein und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 9.)

Wenn zwei in einerlei Ebene befindliche gerade Linien AB und CD eine solche gegenseitige Lage haben, daß wenn sie von einer geraden Linie EF geschnitten werden,

1) die innern Wechselswinkel x und u, oder z und y gleich sind,

oder 2) die äussern Wechselswinkel m und q, oder n und p gleich sind,

oder 3) der äussere Winkel dem ihm gegenüberstehenden innern Winkel gleich ist, nemlich wenn $n = y$, oder $m = u$, oder $p = z$, oder $q = x$ ist,

oder 4) die Summe der beiden innern an einerlei Seite der schneidenden Linie befindlichen Winkel zweien rechten gleich ist, nemlich wenn $x + y = 2R$, oder $z + u = 2R$ ist,

oder 5) die Summe der beiden äussern an einerlei Seite der schneidenden Linie befindlichen Winkel zweien rechten Winkeln gleich ist, nemlich wenn $m + p = 2R$, oder $n + q = 2R$ ist,

so sind die beiden geraden Linien AB und CD parallel.

Beweis.

Erster Fall. Wenn die innern Wechselswinkel gleich sind, nemlich $u = x$, oder $y = z$. Gesetzt AB und CD seien nicht parallel, so treffen sie, wenn sie hinlänglich verlängert werden, nach irgend einer Gegend, d. h. entweder nach A zu oder nach B zu, zusammen. (16. Satz.) Es geschehe nun dieses Zusammentreffen nach B zu, so ist u größer als x, und z größer als y, (20. Satz.) dieses ist

aber gegen die Voraussetzung. Könnte aber dieses Zusammentreffen nach A zu geschehen, so wäre x größer als u, und y größer als z, welches gleichfalls gegen die Voraussetzung ist. Also treffen AB und CD nach keiner Gegend zusammen, daher sind sie parallel. (3. Satz, Definition.)

Zweiter Fall. Wenn die äussern Wechselswinkel m und q, oder n und p gleich sind.

Es sei q = m,
nun ist x = m (als Scheitelwinkel,)
also ist q = x,
ferner ist q = u (als Scheitelwinkel,)
folglich x = u,

daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.

Oder es sei p = n,
nun ist z = n (als Scheitelwinkel,)
also ist p = z,
ferner ist p = y (als Scheitelwinkel,)
folglich ist y = z,

daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.

Dritter Fall. Wenn der äussere Winkel dem ihm gegenüberstehenden innern Winkel gleich, nemlich n = y, oder m = u, oder p = z, oder q = x ist.

Es sei n = y,
nun ist n = z (als Scheitelwinkel,)
also y = z,

daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.

Oder es sei m = u,
nun ist m = x (als Scheitelwinkel,)
also ist u = x,

daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.

Oder es sei $p = z$,
nun ist $p = y$ (als Scheitelwinkel,)
also ist $y = z$,
daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.
Oder es sei $q = x$,
nun ist $q = u$ (als Scheitelwinkel,)
also ist $u = x$,
daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.

Vierter Fall. Wenn die Summe der beiden innern, an einerlei Seite der schneidenden Linie befindlichen Winkel zweien rechten gleich ist. Nemlich wenn $x + y = 2R$ oder $z + u = 2R$ ist.

Es sei $x + y = 2R$,
nun ist auch $x + z = 2R$ (als Nebenwinkel,)
also ist $x + y = x + z$,
folglich $y = z$,
daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.
Oder es sei $z + u = 2R$,
nun ist auch $z + x = 2R$ (als Nebenwinkel,)
also ist $z + u = z + x$,
folglich $u = x$,
daher sind, (nach dem ersten Fall,) AB und CD parallel.

Fünfter Fall. Wenn die Summe der beiden äussern, an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zweien rechten gleich ist. Nemlich wenn $m + p = 2R$, oder $n + q = 2R$ ist.

Es sei $m + p = 2R$,
nun ist $m = x$,
und $p = y$ (als Scheitelwinkel,)
also ist $x + y = 2R$,
daher sind, (nach dem vierten Fall,) AB und CD parallel.

Oder es sei n + q = 2 R,
nun ist n = z,
und q = u (als Scheitelwinkel,)
also ist z + u = 2 R,
daher sind, (nach dem vierten Fall,) AB und CD parallel.

Zwei und zwanzigter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 11.)

Wenn aus zwei beliebigen Punkten E und H einer gegebenen geraden Linie AB zwei gleiche senkrechte Linien ED und HC in der nemlichen Ebene und an einerlei Seite der geraden Linie AB, auf dieser Linie errichtet werden, und durch die Endpunkte C und D dieser gleichen senkrechten Linien die gerade Linie CD gezogen wird, so sind die beiden Linien HC und ED auch auf der geraden Linie CD senkrecht, das heißt: HCD und EDC sind rechte Winkel.

Beweis.

Halbire die EH, und errichte aus dem Halbirungspunkt G auf AB an derjenigen Seite, an welcher die Punkte C und D liegen, die senkrechte Linie GL. Diese schneidet die CD. Denn nach der Construction ist LGE ein rechter Winkel, so wie auch der Winkel CHE, also sind diese beiden Winkel gleich, und wenn man AB als scheidende Linie betrachtet, so ist LGE der äussere und CHE der innere gegenüberstehende Winkel, folglich GL parallel mit HC, (21. Satz, 3. Fall.) auch ist, nach der Construction, LGH ein rechter Winkel, und DEH gleichfalls, folglich ist GL auch parallel mit ED, (21. Satz, 3. Fall.) also trift GL weder mit HC noch mit ED zusammen, daher schneidet sie

die CD zwischen den Punten C und D, dieses geschehe im Punkt F. Man ziehe FH und FE, so sind die Dreiecke HFG und GFE congruent, (weil HG = GE, nach der Construction, HGF = EGF als rechte Winkel, und FG gemeinschäftlich ist,) also ist m = n, q = p und FH = FE. Da nun die rechten Winkel CHG und DEG gleich sind, so ist auch CHG — m oder x = DEG — n oder = y. Da ferner, nach der Construction, CH = DE, und, nach dem Erwiesenen, FH = FE ist, so sind auch die beiden Dreiecke CHF und DEF congruent, also ist CF = DF, auch sind die Winkel FCH und EDF gleich, so wie auch die Winkel w und z. Es ist aber, nach dem Erwiesenen, auch q = p, folglich q + w = p + z, nemlich CFG = DFG, und da sie zugleich Nebenwinkel sind, so ist jeder ein rechter Winkel. Endlich ziehe man DG, und vergleiche die Dreiecke GEF und EGD. In ihnen sind die rechten Winkel FGE und DEG gleich, EG ist gemeinschäftlich, und FG = DE. Denn gesetzt, FG sei kleiner als DE, so ist auch die senkrechte CH kleiner als FG, (18. Satz.) folglich ist CH auch kleiner als DE, welches der Construction, nach der CH = DE ist, widerspricht. Gesetzt aber, FG sei größer als DE, so ist auch CH größer als FG, (18. Satz.) daher auch CH größer als DE, welches gleichfalls der Construction widerspricht. Da also FG nicht kleiner und nicht größer als DE ist, so ist FG = DE, d. i. = CH. Folglich sind die Dreiecke GEF und EGD congruent, daher EF = DG. Da aber auch FG = DE und DF gemeinschäftlich ist, so sind die Dreiecke GDF und EFD gleichfalls congruent, folglich die Winkel EDF und DFG gleich. Nach dem Erwiesenen ist aber DFG ein rechter Winkel, also auch EDF. Da nun, nach dem Erwiesenen, auch FCH = EDF, so ist FCH gleichfalls ein rechter Winkel.

Drei und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 12. u. 13.)

Wenn bei zwei in der nemlichen Ebene befindlichen, der Lage nach gegebenen geraden Linien AB und CD, von einem beliebigen Punkt der einen, z. B. der CD, auf die andere eine senkrechte Linie GK gezogen wird, und die Winkel bei dem Punkt G keine rechten Winkel sind, folglich der eine, z. B. DGK spitzig und sein Nebenwinkel CGK stumpf ist, so treffen die beiden geraden Linien AB und CD, hinlänglich verlängert, nach der Gegend zusammen, nach welcher zu der spitzige Winkel DGK an der senkrechten GK liegt.

Beweis.

Verlängere die senkrechte GK nach F. Ziehe aus einem beliebigen Punkt H der CD eine senkrechte Linie HI auf FG, welche vor dem spitzigen Winkel KGH liegen wird, (weil ausserdem ein rechtwinkliches Dreieck entstünde, in welchem die Summe zweier Winkel grösser als zwei rechte wäre, welches gegen den 11. Satz ist,) so ist GIH ein rechter Winkel, und GKB gleichfalls, (nach der Voraussetzung,) folglich ist KB parallel der IH. (21. Satz.) Gesetzt nun, der Punkt K liege zwischen den Punkten G und I, (wie Fig. 12.) so ist GIH ein Dreieck, in dessen einer Seite der Punkt K der Linie AB liegt, und mit dessen anderer Seite IH die Linie AB parallel ist, folglich mit solcher nicht zusammentrift, daher schneidet AB verlängert dessen dritte Seite GH, oder die Linie CD.

Gesetzt aber, (Fig. 13.) der Punkt I liege zwischen den Punkten G und K, so mache IM = GI. Fällt nun M

auch zwischen G und K, so mache MN = GM = 2 GI. Liegt nun N auch zwischen G und K, so mache NR = NG = 4 GI, und so nimm immerfort das Doppelte des nächst vorhergehenden Vielfachen der GI, bis die Linie, deren einer Endpunkt G, und der andere der auf diese Art bestimmte Punkt ist, und die folglich ein Vielfaches der GI ist, größer ist, als die gegebene senkrechte GK. (6. Satz, Postulat.) Es sei nun GR größer als GK, so liegt der Punkt K zwischen den Punkten G und R. Mache hierauf auf der Linie CD, die Linie HL = GH, LP = 2 GH, PS = 4 GH, und so fort nimm das Doppelte des nächstvorhergehenden Vielfachen der GH, bis die gerade Linie, deren einer Endpunkt G und der andere der auf diese Art bestimmte Punkt ist, ein solches Vielfaches der GH ist, als die vorher auf GF bestimmte Linie ein Vielfaches der GI war. Verlängere IH, und mache HQ = IH. Ziehe durch die Theilungspunkte M und L die ML, verlängere sie, und mache LT = ML, ziehe durch die Theilungspunkte N und P die NP, verlängere sie, und mache PO = NP, ziehe durch die Theilungspunkte R und S die RS. Endlich ziehe QL, TP und OS. Nun sind die Dreiecke IGH und QLH congruent, (weil HL = GH, HQ = IH, und die Scheitelwinkel am Punkt H gleich sind,) folglich ist QL = GI, und da GIH ein rechter Winkel ist, (weil HI auf KG senkrecht gezogen wurde,) so ist auch HQL ein rechter Winkel. Es ist aber auch HIM ein rechter Winkel, und weil IM = GI, (nach der Construction,) so ist auch QL = IM. Folglich sind QL und IM zwei auf IQ an einerlei Seite derselben senkrecht stehende gleiche Linien, deren Endpunkte L und M mit der geraden Linie LM verbunden sind, also ist GML ein rechter Winkel, (22. Satz.) daher sein Nebenwinkel LMN auch ein rechter Winkel. Ferner sind

die Dreiecke MGL und TPL congruent, (weil die Scheitelwinkel am Punkt L gleich sind, auch nach der Construction LP = LG und LT = LM ist,) also ist TP = GM = MN, und LTP = GML. Da nun GML ein rechter Winkel ist, so ist auch LTP ein rechter Winkel. Folglich ist GNP ein rechter Winkel. (22. Satz.) Auf ähnliche Art wird vermittelst der Congruenz der beiden Dreiecke NGP und OSP, und der daraus folgenden Gleichheit der geraden Linien OS und NR bewiesen, daß NRS ein rechter Winkel ist. Da nun GKB auch ein rechter Winkel ist, (nach der Voraussetzung,) so ist KB mit RS parallel. (21. Satz, 3. Fall.) Nun ist die Figur GSR ein Dreieck, in dessen einer Seite der Punkt K liegt, und mit dessen anderer Seite RS die gerade Linie KB parallel ist, das heißt: mit ihr nicht zusammentrift, (15. Satz, Definition.) also muß KB, hinlänglich verlängert, dessen dritte Seite GS schneiden, das heißt: die gerade Linie AB trift, wenn sie hinlänglich verlängert wird, mit der geraden Linie CD zusammen.

Vier und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 14.)

Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so ist diejenige gerade Linie, welche auf der einen Parallellinie senkrecht ist, auch senkrecht auf der andern Parallellinie.

Beweis.

Es seien AB und CD parallel, und EF senkrecht auf AB. Gesetzt nun, EF sei nicht auch senkrecht auf CD, so sind CEF und DEF, als Nebenwinkel, schiefe Winkel, nemlich der eine ein stumpfer, der andere ein spitziger Winkel. Folglich treffen AB und CD, hinlänglich verlängert,

nach der Gegend zusammen, nach welcher der spitzige Winkel liegt. (23. Satz.) Also sind sie nicht parallel, (17. Satz.) welches der Voraussetzung widerspricht.

Fünf und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 16, 17 und 18.)

Wenn zwei gerade, in einerlei Ebene befindliche und der Lage nach gegebene gerade Linien, AB und CD von einer dritten geraden Linie EF geschnitten werden, und die Summe der beiden innern Winkel DGF und BKG kleiner als zwei rechte Winkel ist, so treffen sie, wenn sie hinlänglich verlängert werden, nach derjenigen Gegend zusammen, nach der die gedachten beiden innern Winkel liegen.

Beweis.

Da die beiden innern Winkel DGK und BKG zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, so muß, wenn der eine, z. B. DGK ein rechter oder stumpfer Winkel ist, der andere ein spitziger Winkel seyn.

Erster Fall. Wenn der eine innere Winkel, z. B. BKG (Fig. 12.) ein rechter Winkel ist, so treffen AB und CD, hinlänglich verlängert, zusammen. (22. Satz.)

Zweiter Fall. Wenn keiner dieser beiden innern Winkel DGK und BKG ein rechter Winkel ist, so sind entweder beide spitzig, oder der eine ist stumpf und der andere spitzig. Ist der eine Winkel stumpf, z. B. der Winkel DGF, (Fig. 16.) so ziehe aus der Spitze G dieses stumpfen Winkels auf die andere gerade Linie, hier auf AB, die gerade Linie GI senkrecht, und setze auch an die Spitze G dieses stumpfen Winkels einen Winkel EGH, der dem

gegenüberstehenden innern Winkel BKG gleich ist, so ist GH parallel mit AB. (21. Satz, 3. Fall.) Sind aber die beiden innern Winkel DGK und BKG spitzig, (wie in Fig. 17. und 18.) so ist es gleichgültig, ob man an der Spitze G des spitzigen Winkels DGK diese Construction vornimmt, (wie in Fig. 17.) oder an der Spitze K des andern spitzigen Winkels BKG, (wie in Fig. 18.)

Nun ist die auf AB senkrecht stehende Linie GI auch senkrecht auf der mit AB parallelen Linie GH, (24. Satz.) also ist IGH ein rechter Winkel. Ferner ist

DGK + BKG kleiner als 2R (nach der Voraussetzung,)

und DGK + DGE = 2R, (als Nebenwinkel,)

folglich ist DGK + BKG kleiner als DGK + DGE,

also ist auch BKG kleiner als DGE,

oder DGE größer als BKG,

aber es ist EGH = BKG (nach der Construction,)

also ist DGE auch größer als EGH,

daher liegt GD zwischen GK und GH.

Nun liegt die senkrechte Linie GI vor dem spitzigen Winkel BKG, folglich liegt GD entweder zwischen der schneidenden Linie GK und der senkrechten GI, oder in der senkrechten GI, oder zwischen der senkrechten GI und der Parallele GH. Ist das erste, so bleibt GD auch verlängert zwischen den verlängerten Linien GK und GI, und da diese verlängert die AB schneiden, so schneidet auch GD oder CD verlängert die AB. Für diesen Fall ist also der Lehrsatz erwiesen.

Liegt aber GD in GI, so schneidet sie auch verlängert die AB, weil GI verlängert solche schneidet. Für diesen Fall ist also der Lehrsatz auch erwiesen.

Liegt

Liegt endlich GD zwischen GI und GH, so ist IGD, als ein Theil des Winkels IGH, kleiner als der Winkel IGH. Dieser ist aber, nach dem vorhin Erwiesenen, ein rechter Winkel, also ist IGD ein spitziger Winkel. Da also AB und CD von der verlängerten GI so geschnitten werden, daß der eine innere Winkel BIG ein rechter, und der andere DGI ein spitziger Winkel ist, so treffen sie, hinlänglich verlängert, nach derjenigen Gegend zusammen, nach welcher der spitzige Winkel liegt. (23. Satz.) Nun liegen die Winkel DGK und BKG, deren Summe, nach der Voraussetzung, kleiner als zwei rechte Winkel ist, auch nach derjenigen Gegend, nemlich nach B und D zu, nach welcher der spitzige Winkel DGI liegt, weil die senkrechte GI vor dem spitzigen Winkel BKG fällt, also treffen AB und CD, hinlänglich verlängert, nach derjenigen Gegend zusammen, nach der zu die beiden innern Winkel BKG und DGK, deren Summe kleiner als zwei rechte ist, liegen.

Anmerkung.

Dieser Lehrsatz ist derjenige Satz, der in Euklid's Elementen als Grundsatz aufgestellt ist, und zwar ist er der eilfte Grundsatz des Euklids.

Sechs und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 9.)

Wenn zwei gerade Linien AB und CD parallel sind, und von einer geraden Linie FG geschnitten werden, so ist

1) die Summe der beiden innern an einerlei Seite der schneidenden Linie befindlichen Winkel zweien rechten Winkeln gleich, nemlich es ist $x + y = 2R$ und $z + u = 2R$;

2) der Summe der beiden äussern, an einerlei Seite der schneidenden Linie befindlichen Winkel zweien rechten Winkeln gleich, nemlich es ist $m + p = 2R$ und $n + q = 2R$;

3) sind die innern Wechselswinkel gleich, nemlich $x = u$ und $z = y$;

4) sind die äussern Wechselswinkel gleich, nemlich $m = q$ und $n = p$;

5) ist der äussere Winkel dem ihm gegenüberstehenden innern Winkel gleich, nemlich $m = u$, $n = y$, $q = x$ und $p = z$.

Beweis.

Erster Fall. Wenn AB und CD parallel sind, so ist $x + y = 2R$. Denn gesetzt $x + y$ sei nicht zweien rechten Winkeln gleich, so ist diese Summe entweder kleiner oder größer als zwei rechte Winkel. Ist aber die Summe $x + y$ kleiner als zwei rechte Winkel, so treffen AB und CD, hinlänglich verlängert, nach derjenigen Gegend zusammen, nach welcher zu die beiden Winkel x und y liegen, (25. Satz.) also sind sie nicht parallel, (17. Satz.) welches der Voraussetzung widerspricht. Gesetzt aber $x + y$ sei größer als zwei rechte, so ist $z + u$ kleiner als zwei rechte Winkel. Denn es ist

$x + z = 2R$ (als Nebenwinkel,)
auch ist $u + y = 2R$ (als Nebenwinkel,)

folglich ist $x + z + u + y = 4R$,
davon subtrahirt $x + y$ größer als $2R$,
so ist der Rest $z + u$ kleiner als $2R$,

folglich treffen AB und CD nach derjenigen Gegend, nach der zu die beiden innern Winkel z und u liegen, zusammen,

(25. Satz.) also sind sie nicht parallel, (17. Satz.) welches der Voraussetzung widerspricht. Da nun die Summe der beiden innern an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel x und y nicht kleiner und nicht größer als zwei rechte Winkel seyn kann, so ist sie zweien rechten Winkeln gleich.

Ferner ist auch z + u = 2 R. Denn es ist
z + x = 2 R, (als Nebenwinkel,)
auch u + y = 2 R, (als Nebenwinkel,)
folglich z + u + x + y = 4 R,
davon subtrahirt x + y = 2 R, (nach dem Erwiesenen,)
so ist der Rest z + u = 2 R.

Zweiter Fall. Die Summe der beiden äussern, an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel ist zweien rechten Winkeln gleich. Nemlich es ist m + p = 2 R und n + q = 2 R.

Denn es ist x + y = 2 R, (nach dem ersten Fall,)
aber es ist m = x, (als Scheitelwinkel,)
auch p = y, (als Scheitelwinkel,)
also ist m + p = 2 R.

Da ferner z + u = 2 R, (nach dem ersten Fall,)
und n = z, (als Scheitelwinkel,)
so wie q = u, (als Scheitelwinkel,)
so ist auch n + q = 2 R.

Dritter Fall. Die innern Wechselswinkel sind gleich. Nemlich x = u und z = y.
Denn es ist x + y = 2 R, (nach dem ersten Fall,)
u + y = 2 R, (als Nebenwinkel,)

also $x + y = u + y$,
folglich ist $x = u$.

Es ist aber auch $z + u = 2R$, (nach dem ersten Fall,)
und $y + u = 2R$, (als Nebenwinkel,)
also $z + u = y + u$,
folglich ist $z = y$.

Vierter Fall. Die äussern Wechselswinkel sind gleich. Nemlich $m = q$ und $n = p$.

Denn es ist $x = u$, (nach dem dritten Fall,)
und $x = m$, (als Scheitelwinkel,)
so wie $u = q$, (als Scheitelwinkel,)
daher ist $m = q$.

Es ist aber auch $z = y$, (dritter Fall,)
und $z = n$, (als Scheitelwinkel,)
so wie $y = p$, (als Scheitelwinkel,)
daher ist $n = p$.

Fünfter Fall. Der äussere Winkel ist dem gegenüberstehenden innern Winkel gleich. Nemlich $m = u$, $q = x$, $n = y$ und $p = z$.

Denn es ist $x = u$, (dritter Fall,)
und $x = m$, (als Scheitelwinkel,)
also ist 1) $m = u$.

Ferner ist wiederum $x = u$,
und $q = u$, (als Scheitelwinkel,)
also 2) $q = x$.

Es war auch $z = y$, (dritter Fall,)
nun ist $z = n$, (als Scheitelwinkel,)
also 3) $n = y$.

Endlich ist wiederum $z = y$,
auch ist $p = y$, (als Scheitelwinkel,)
also 4) $p = z$.

Sieben und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 19.)

Wenn zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien AB und CD eine solche Lage gegen einander haben, daß sich in der einen, (z. B. in der CD,) zwei Punkte, (z. B. E und G) angeben lassen, so daß die beiden von diesen zwei Punkten auf die andere gerade Linie senkrecht gezogenen geraden Linien EF und GH gleich sind, so sind die geraden Linien AB und CD parallel.

Beweis.

Jede dieser beiden auf AB senkrecht stehenden Linien EF und GH ist auch auf CD senkrecht, (22. Satz.) also ist nicht nur der Winkel EFH ein rechter Winkel, sondern auch der Winkel FEG, folglich ist die Summe der beiden innern, an einerlei Seite der schneidenden Linie EF liegenden Winkel EFH und FEG zweien rechten Winkeln gleich, daher sind AB und CD parallel. (21. Satz, 4. Fall.)

Acht und zwanzister Satz.

Lehrsatz. (Fig. 19.)

Wenn zwei gerade Linien AB und CD parallel sind, so sind sie äquidistant, das heißt: alle senkrechten Linien, die aus beliebigen Punkten der einen Parallellinie, zum Beispiel der CD auf die andere gezogen werden, sind gleich.

Beweis.

Wenn AB und CD parallel sind, und aus zwei beliebigen Punkten der einen Parallellinie, z. B. aus den Punkten E und G der CD, die geraden Linien EF und GH senkrecht auf AB gezogen werden, so ist zu beweisen, daß GH = EF ist. Man ziehe FG, so sind die Wechselswinkel w und z gleich, (26. Satz, 3. Fall.) da ferner, nach der Construction EF und GH auf AB senkrecht sind, so ist, wenn AB als schneidende Linie betrachtet wird, der äussere Winkel GHB als rechter Winkel, dem innern gegenüberstehenden rechten Winkel EFB gleich, folglich sind EF und GH parallel, (21. Satz, 3. Fall.) also die Wechselswinkel x und y gleich. (26. Satz, 3. Fall.) Nun sind die beiden Dreiecke GEF und FHG congruent, (weil x = y, w = z und FG gemeinschäftlich ist,) folglich die senkrechten Linien EF und GH gleich.

Da nun eben so von jeder aus irgend einem andern beliebigen Punkt der CD auf AB, (so weit auch CD und AB verlängert werden mögen,) senkrecht gezogenen geraden Linie erwiesen werden kann, daß sie der senkrechten EF oder GH gleich ist, so sind die Parallellinien AB und CD äquidistant, oder gleichweit abstehend.

Zusatz.

Daß zwei äquidistante Linien parallel sind, folgt aus dem 27. Satz. Wenn sie also von einer dritten geraden Linie irgendwo beliebig geschnitten werden, so sind die Wechselswinkel gleich, u. s. f. (nach dem 26. Satz.)

Neun und zwanzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 19.)

Wenn zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien AB und CD eine solche Lage gegeneinander haben, daß sich in der einen, (z. B in der CD) zwei Punkte, (z. B. E und G) angeben lassen, so daß die beiden von diesen zwei Punkten auf die andere gerade Linie senkrecht gezogenen geraden Linien EF und GH gleich sind, so sind die beiden geraden Linien AB und CD, so weit sie auch nach beiden Seiten verlängert werden mögen, äquidistant.

Beweis.

Da die zwei senkrechten Linien EF und GH gleich sind, so sind die geraden Linien AB und CD parallel, (27. Satz) zwei parallele Linien aber sind äquidistant, (28. Satz.) also sind auch AB und CD äquidistant.

Dreißigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 7.)

Zwei gerade Linien AB und CD, die in der nemlichen Ebene eine solche Lage gegen einander haben, daß sich in der einen, (z. B. in der Linie CD,) zwei Punkte angeben lassen, (z. B. C und F,) aus welchen zwei ungleiche auf AB senkrecht stehende Linien möglich sind, nemlich CH und FG, treffen, hinlänglich verlängert, zusammen, und zwar nach derjenigen Gegend, nach welcher die kleinere senkrechte Linie FG liegt.

Beweis.

Daß die zwei geraden Linien AB und CD verlängert, überhaupt zusammen treffen, kann indirect gezeigt werden. Nemlich gesetzt, sie treffen, wenn sie hinlänglich verlängert werden, nicht zusammen, so sind sie parallel, (15. Satz, Definition.) folglich äquidistant, (28. Satz.) also sind die aus allen möglichen Punkten der CD auf AB senkrecht gezogenen geraden Linien gleich, daher ist auch FG = CH, welches der Voraussetzung widerspricht.

Daß aber diese beiden geraden Linien CD und AB nach der Gegend zusammentreffen, nach welcher die kleinere senkrechte Linie FG liegt, kann direct bewiesen werden. (Fig. 20.) Man nehme auf der größern senkrechten Linie CH, die Linie HI = FG und ziehe FI. Da die auf AB senkrechten Linien FG und IH gleich sind, so ist IFG ein rechter Winkel, (22. Satz.) also CFG ein stumpfer Winkel, und daher sein Nebenwinkel DFG ein spitziger Winkel, da aber FGB ein rechter Winkel ist, so treffen die beiden Linien CD und AB, hinlänglich verlängert, nach der Gegend B zusammen. (23. Satz.)

Ein und dreißigster Satz.

Erklärung.

Zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien, die eine solche Lage gegen einander haben, daß alle aus beliebigen Punkten der einen auf die andere senkrecht gezogenen Linien, nach der Ordnung, wie sie nach einerlei Gegend zu folgen, immer abnehmen, nemlich die folgende senkrechte Linie kleiner ist, als die nächst vorhergehende, heißen convergente gerade Linien.

Zwei und dreißigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 20.)

Zwei convergente gerade Linien treffen, wenn sie hinlänglich verlängert werden, zusammen, und zwar nach der Gegend zu, nach welcher die geraden Linien, welche von der einen convergenten Linie auf die andere senkrecht gezogen werden, abnehmen.

Beweis.

Man nehme in der einen convergenten Linie CD zwei beliebige Punkte C und F an, und ziehe aus ihnen auf AB die senkrechten CH und FG, so ist die eine kleiner als die andere. (31. Satz, Definition.) Es sei nun FG kleiner als CH, so treffen die convergenten Linien CD und AB nach B zu zusammen. (30. Satz.)

Drei und dreißigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 21.)

Wenn die eine von zwei convergenten Linien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und aus diesen Theilungspunkten auf die andere convergente Linie gerade Linien senkrecht gezogen werden, so sind die Unterschiede von jedem Paar dieser senkrechten Linien, nach der Ordnung, wie sie nach einer Gegend zu aufeinander folgen, auch gleich.

Beweis.

Es seien CD und AB die convergenten Linien, ferner sei CD in die gleichen Theile CE, EG, GI u. s. f.

getheilt, und aus den Punkten C, E, G, I u. s. f. auf AB die senkrechten CA, EF, GH, IK u. s. f. gezogen. Nun ist EF kleiner als CA und GH kleiner als EF u. s. f. (31. Satz, Definition.) Man mache AL = EF, FM = HG, NH = IK u. s. f. und ziehe LE, MG, NI u. s. f. Nun ist CLE ein rechter Winkel, (22. Satz.) eben so ist EMG ein rechter Winkel, so wie auch GNI u. s. f. Ferner sind die Winkel EFH und CAH als rechte Winkel gleich, daher EF parallel mit CA, folglich, wenn man CD als schneidende Linie betrachtet, ist der äussere Winkel DEF dem innern gegenüberstehenden Winkel DCA gleich. Da nun auch EG = CE ist, so sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke CLE und EMG congruent, (Euklid, 1. B. 26. S.) folglich ist EM = CL. Ferner ist der rechte Winkel GHB dem rechten Winkel EFB gleich, daher ist GH parallel mit EF, folglich ist der äussere Winkel DGH dem innern gegenüberstehenden DEF gleich, also, da auch GI = EG ist, sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke EMG und GNI congruent. Es ist daher GN = EM, und da EM = CL ist, so ist auch GN = CL u. s. f. Nun sind CL, EM, GN u. s. f. die Unterschiede der senkrechten Linien CA, EF, GH und IK u. s. f. Also sind diese Unterschiede gleich.

Vier und dreißigster Satz.

Lehrsatz.

Zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien können keine solche Lage gegen einander haben, daß die eine gegen die andere nicht äquidistant ist, und sie dennoch, wenn sie hinlänglich verlängert werden, nicht zusammentreffen.

Beweis.

Denn zwei in der nemlichen Ebene befindlichen geraden Linien sind entweder parallel oder nicht parallel. Wenn sie aber parallel sind, so sind sie äquidistant, (28. Satz.) wenn sie also nicht äquidistant sind, so sind sie auch nicht parallel, gerade Linien aber, die nicht parallel sind, treffen verlängert zusammen, (16. Satz.) also treffen nicht äquidistante Linien, hinlänglich verlängert, zusammen.

Fünf und dreißigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 22.)

Eine gerade Linie EF, welche die eine Parallellinie CD unter schiefen Winkeln schneidet, schneidet auch, hinlänglich verlängert, die andere hinlänglich verlängerte Parallellinie AB.

Beweis.

Da die Winkel CGF und DGF schiefe sind, so ist der eine stumpf und der andere spitzig. Es sei nun DGF der spitzige Winkel. Man ziehe aus dem Durchschnittspunkt G die gerade Linie GH senkrecht auf AB, so ist auch DGH ein rechter Winkel, (24. Satz.) aber FGH ist ein Theil dieses rechten Winkels, folglich ist FGH ein spitziger Winkel, daher treffen GF und HB, hinlänglich verlängert, zusammen, (23. Satz.) oder die verlängerte EF schneidet die verlängerte AB.

Anmerkung.

Wenn EF die CD unter rechten Winkeln schneidet, so fällt die senkrechte GH in sie, (24. Satz.) also ist klar, daß EF verlängert die AB schneidet.

Sechs und dreißigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 23.)

Eine gerade Linie EF, welche eine Parallellinie CD schneidet, schneidet auch alle übrigen geraden Linien, so viele derselben seyn mögen, die mit der CD parallel sind.

Beweis.

Es seien die Linien CD, KI, GH und AB parallel, und CD werde von der geraden Linie EF geschnitten. Man ziehe aus dem Durchschnittspunkt L auf die letzte Parallellinie AB die gerade Linie LM senkrecht, so ist CLM auch ein rechter Winkel, (24. Satz.) folglich MLF, (als ein Theil von CLM) ein spitziger Winkel. Daher trift die hinlänglich verlängerte EF mit der hinlänglich verlängerten AB zusammen, (23. Satz.) folglich schneidet die verlängerte EF, die zwischen AB und CD liegenden Parallellinien KI und GH, wenn sie hinlänglich verlängert sind.

Sieben und dreißigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 24. und 25.)

Zwei gerade Linien AB und CD, die mit einer geraden Linie GH parallel sind, sind miteinander parallel.

Beweis.

Erster Fall. Wenn die gerade Linie GH, mit der die geraden Linien AB und CD parallel sind, zwischen AB und CD liegt. Man nehme in CD einen beliebigen Punkt M, und in AB einen beliebigen Punkt N an, und ziehe durch M und N die gerade Linie EF. Da AB mit GH

parallel ist, so ist $y = z$, und da CD auch mit GH parallel ist, so ist $x = y$, folglich $x = z$, daher sind AB und CD parallel.

Zweiter Fall. (Fig. 25.) Wenn die gerade Linie GH mit welcher AB und CD parallel sind, nicht zwischen AB und CD liegt. Man nehme in GH und AB die Punkte I und K an, und ziehe durch solche die gerade Linie EF. Da AB mit GH parallel ist, so ist $x = z$, und da auch CD mit GH parallel ist, so ist $y = x$, also $y = z$, folglich sind AB und CD parallel.

Acht und dreißigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 26.)

Parallellinien zwischen Parallellinien sind gleich.

Beweis.

Wenn CD mit AB und AC mit BD parallel ist, so wird behauptet, daß CD = AB und AC = BD ist. Man ziehe BC. Da CD und AB parallel sind, so sind die innern Wechselswinkel x und y gleich, und da AC und BD parallel sind, so sind die innern Wechselswinkel w und z gleich, da ferner BC = BC ist, so sind die beiden Dreiecke BAC und BDC congruent, also CD = AB und BD = AC.

Neun und dreißigster Satz.

Aufgabe. (Fig. 27. und 28.)

Wenn eine gerade Linie BC und ein ausser ihr befindlicher Punkt A gegeben ist, in der Ebene, deren Lage durch

die Lage der BC und des Punkts A bestimmt ist, eine mit BC parallele Linie durch den Punkt A zu ziehen.

Erste Auflösung.

Man nehme in der gegebenen BC einen beliebigen Punkt D an, ziehe durch ihn und den gegebenen Punkt A die gerade Linie AD, setze an den Punkt A einen Winkel DAG, der dem Winkel BDA gleich ist, und verlängere GA über A hinaus.

Beweis.

Die innern Wechselswinkel DAG und BDA sind gleich, nach der Construction, also ist AG parallel mit BC. (21. Satz, 1. Fall.)

Zweite Auflösung.

Aus dem gegebenen Punkt A ziehe man die AD senkrecht auf die gegebene BC, und aus einem beliebigen Punkt E der BC errichte man in der Ebene BAC die senkrechte EF = AD. Hierauf ziehe man durch A und F die gerade Linie GH.

Beweis.

Es ist EF = DA, nach der Construction, also GH parallel mit BC. (27. Satz.)

Vierzigster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 22.)

Durch einen, ausserhalb der geraden Linie AB gegebenen Punkt G, kann nur eine einzige gerade Linie CD mit AB parallel gezogen werden.

Beweis.

Es sei ausser CD auch EF parallel mit AB, so ist, wenn man durch den Durchschnittspunkt G und einen beliebigen Punkt H in der Linie AB die gerade Linie GH zieht, der Winkel CGH = dem Winkel GHB, (als Wechselswinkel, (26. Satz, 3. Fall.) und eben so EGH = GHB, also ist CGH = EGH, nemlich der Theil dem Ganzen gleich, welches unmöglich ist.

Anmerkung.

Dieses folgt auch sogleich aus dem 35. Satz. Denn eigentlich haben der 35. Satz und dieser 40. Satz bei verschiedenem Ausdruck dennoch einerlei Bedeutung.

Anhang.

Um Anfängern in der Mathematik Veranlassung zu geben, ihre Urtheilskraft zu üben, will ich folgenden Beweis des 25. Satzes aufstellen, und ihrem Scharfsinn überlassen, das Unzulängliche desselben aufzufinden.

Lehrsatz. (Fig. 16. und 17.)

Wenn zwei in einer Ebene befindliche gerade Linien AB und CD von einer geraden Linie EF so geschnitten werden, daß die Winkel CGK und BKG ungleich sind, so treffen die beiden Linien AB und CD an der Seite der EF zusammen, an der der kleinere Winkel BKG liegt.

Beweis.

Man mache den Winkel EGH = BKG, so ist GH mit AB parallel, (21. Satz.) nun ist CGF = DGE, (als Scheitelwinkel,) und nach der Annahme BKG kleiner als CGK, also kleiner als DGE, oder DGE größer als BKG, aber EGH ist = BKG, (nach der Construction,) folglich ist DGE größer als EGH. Daher liegt GD zwischen GH und AB, also hat GD nicht die Lage der GH, allein die Lage der GH ist mit AB parallel, folglich ist die Lage der GD oder CD mit AB nicht parallel, daher trift CD wenn sie hinlänglich verlängert wird, mit AB gegen B und D zu, zusammen. (16. Satz.)

Zweite

Zweite Theorie der Parallellinien.

Den Kennern übergebe ich hier noch folgende zweite Theorie der Parallellinien, die ihre Stelle zwischen dem 28. und 29. Satz des ersten Buchs der Elemente Euklid's hat, und sich blos auf die vorhergehenden Sätze dieser Elemente, (den 11. Euklidischen Grundsatz ausgenommen, der erst vermittelst dieser Theorie als Lehrsatz bewiesen wird,) gründet.

Erster Lehrsatz.

Zwei in der nemlichen Ebene befindliche gerade Linien AB und CD, (Fig. 14.) die von einer geraden Linie EF unter rechten Winkeln geschnitten werden, nemlich so, daß DEF und BFE rechte Winkel sind, sind parallel.

Beweis.

Dieser folgt sogleich aus dem 27. Satz des ersten Buchs der Elemente Euklid's, weil nemlich die Wechselwinkel gleich sind.

Zusatz.

Da aber hier noch nicht ausgemacht, sondern blos problematisch ist, ob durch den Punkt G (Fig. 22.) mit AB nur die einzige CD parallel gezogen werden kann, das

heißt: ob eine gerade Linie EF, welche die eine Parallele CD schneidet, auch noch dann die andere Parallele AB schneiden wird, wenn der Winkel HGF dem Winkel HGD äusserst nahe kommt, oder ob nicht durch den nemlichen Punkt G, mit der in einerlei Ebene befindlichen geraden AB, gerade Linien nach zwei verschiedenen Arten parallel seyn können, so sei irgend eine andere mit AB und CD in einerlei Ebene befindliche und durch den Punkt G gezogene gerade Linie z. B. EF auch parallel mit AB, das heißt: sie treffe verlängert mit der verlängerten AB nicht zusammen. Eine solche Linie EF macht mit der auf AB senkrechten GH am Punkt G schiefe Winkel, von denen der eine spitzig ist, und bildet mit der CD am Punkt G einen gewissen spitzigen Winkel FGD. Nun nenne ich zwei gerade Linien CD und AB, die auf einer geraden Linie GH senkrecht stehen, also von GH unter rechten Winkeln geschnitten werden, so daß nemlich BHG und DGH rechte Winkel sind, Parallellinien der ersten Art, aber zwei gerade Linien AB und EF, welche auf einer geraden Linie GH so stehen, daß der eine Winkel BHG ein rechter, der andere Winkel FGH hingegen ein solcher schiefer Winkel ist, daß AB und EF verlängert auch nicht zusammen treffen, nenne ich Parallellinien der zweiten Art.

Zweiter Lehrsatz.

Zwei Parallellinien der ersten Art treffen nicht zusammen, so klein auch die gerade Linie, auf der sie senkrecht stehen, oder jede andere aus einem beliebigen Punkt der einen Parallele auf die andere Parallele senkrecht gezogene Linie seyn mag, aber das nicht Zusammentreffen zweier Parallellinien der zweiten Art hängt von der Größe derje-

nigen geraden Linie zwischen ihnen, mit der die eine Parallele einen rechten und die andere einen schiefen Winkel bildet, ab. Oder: das Nichtzusammentreffen zweier Parallellinien der ersten Art hängt nicht von der Größe des Abstandes irgend eines Punktes in der einen von der andern ab, aber das Zusammentreffen zweier Parallellinien der zweiten Art hängt von der Größe eines gewissen Abstandes ab.

Beweis.

Es seien, (Fig. 28.) ADC und DAG rechte Winkel, folglich AG und BC nach der ersten Art parallel, man nehme ferner die auf beiden Parallelen senkrechte AD so klein an als man will, und setze, es treffen alsdann AG und BC hinlänglich verlängert, zusammen, so entsteht ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln, welches gegen den 17. Satz des ersten Buchs Euklid's ist. Es sei nun ferner aus einem beliebigen Punkt F die FE auf BC senkrecht gezogen, und man nehme auf EF zwischen E und F, so nahe an E als man will einen Punkt M an, und ziehe aus ihm die MP auf AD senkrecht, so ist MP mit BC nach der ersten Art parallel, weil bei D und P rechte Winkel sind, und trift folglich mit BC auch nicht zusammen. Wenn aber (Fig. 20.) BHC ein rechter, aber DCH ein spitziger Winkel ist, und zwar von der Beschaffenheit, daß demohngeachtet CD und AB verlängert nicht zusammentreffen, so sind AB und CD nach der zweiten Art parallel. Man nehme nun auf CD einen beliebigen Punkt F an, und ziehe aus ihm die FI senkrecht auf CH, so fällt die senkrechte FI vor dem spitzigen Winkel DCH, denn ausserdem entstände ein Dreieck mit einem rechten und einem stumpfen Winkel, in welchem also die Summe zweier Winkel größer

als zwei rechte wäre, gegen den erwähnten 17. Satz Euklid's. Also liegt der Punkt I zwischen den Punkten C und H. Man mache sodann auf HB die HG = IF, nehme auf HC vom Punkt H aus, ein Stück = IC, und verbinde den Endpunkt G und den zweiten Endpunkt des eben auf HC genommenen Stücks mit einer geraden Linie a, so entsteht ein rechtwinkliches Dreieck, welches mit dem rechtwinklichen Dreieck CIF congruent ist. (Euklid, 4. Satz.) Also macht die Verbindungslinie a mit HC gegen HB zu einen Winkel, der dem gegenüberstehenden innern FCH gleich ist, daher ist die Verbindungslinie a mit CD parallel, (Euklid, 28. Satz.) schneidet aber die HB. Das heißt: die CD schneidet die HB oder die AB, wenn sie durch denjenigen Punkt der auf AB senkrechten Linie CH geht, aus welchem die Verbindungslinie a gezogen wurde.

Ist aber der gegebene Winkel DCH nicht spitzig sondern stumpf, so ist sein Nebenwinkel spitzig, und der Beweis wird wie vorhin geführt.

Dritter Lehrsatz. (Fig. 7.)

Eine gerade Linie CD kann mit einer andern in der nemlichen Ebene befindlichen geraden Linie AB nicht zugleich nach der ersten und zweiten Art parallel seyn.

Beweis.

Es seien (Fig. 7.) CH und FG auf AB senkrecht, und FCH ein solcher schiefer Winkel, daß CF mit AB nach der zweiten Art parallel ist, so hängt das Nichtzusammentreffen der CF mit der AB von dem Abstand CH des Punktes C von der AB ab. Es sei aber ferner CFG ein rechter Winkel, so ist CF mit der AB nach der ersten Art parallel, folglich hängt das Nichtzusammentreffen der CF mit der AB von keinem Abstand irgend eines in ihr belie-

big angenommenen Punktes von der andern Linie AB ab, (d. h. weder von der Größe der FG, noch der CH, oder der DE oder sonst einer auf AB senkrechten Linie). Allein nach dem vorigen hängt dieses Nichtzusammentreffen von der Größe der CH ab. Dieses widerspricht sich, und daher ist CF mit AB nicht zugleich nach der ersten und zweiten Art parallel.

Vierter Lehrsatz.

Wenn in einem Viereck DEFA (Fig. 28.) drei rechte Winkel bei E, D und A sind, so ist der vierte Winkel AFE auch ein rechter Winkel.

Beweis.

Gesetzt AFE sei kein rechter Winkel, so ist er ein schiefer. Nun ist DEF ein rechter, also finden zwei Fälle statt, nemlich FA ist mit ED entweder gar nicht parallel, d. h. FA und ED treffen verlängert zusammen, oder FA ist mit ED parallel, alsdann ist dieses Parallelseyn nach der zweiten Art.

Erster Fall. Es treffe FA mit ED verlängert zusammen. Da nun bei A und D rechte Winkel sind, so ist AF mit DE parallel, d. h. AF trift mit DE verlängert nicht zusammen. Nun ist AF und FA einerlei Linie, so wie auch DE und ED die nemliche Linie ist. Also treffen AF und DE verlängert zusammen, und zugleich auch nicht zusammen. Welches widersprechend ist.

Zweiter Fall. Es sei FA mit ED nach der zweiten Art parallel. Da nun bei A und D rechte Winkel sind, so ist AF mit DE nach der ersten Art parallel. Also ist AF mit DE zugleich nach der ersten und zweiten Art parallel. Welches gleichfalls widersprechend ist.

(3. Lehrsatz.) Da also die Annahme, daß AFE ein schiefer Winkel sei, auf einen Widerspruch führt, so ist AFE kein schiefer Winkel, folglich ein rechter.

Fünfter Lehrsatz.

In jedem Viereck EHCD (Fig. 11.) welches vier rechte Winkel hat, sind die gegenüberstehenden Seiten DE und CH, so wie auch CD und EH gleich.

Beweis.

Man halbire EH im Punkt G, und errichte die auf EH senkrechte GL, welche CD zwischen C und D in F schneidet, da sie mit HC und ED parallel ist. Hierauf ziehe man EF und HF, so ist leicht zu beweisen, daß das Dreieck EGF mit dem Dreieck HGF, ferner das Dreieck HCF mit dem Dreieck EDF congruent, folglich CH = DE ist. Denn da (Fig. 11.) GH = GE, HGL = EGL, (als rechte Winkel,) und FG = FG ist, so sind die Dreiecke EGF und HGF congruent, (Euklid 1. Buch, 4. Satz.) folglich ist FH = FE, q = p und m = n. Es ist aber CHG DEG, (als rechte Winkel, nach der Bedingung des Lehrsatzes,) also auch CHG — m = DEG — n, das ist: x = y, ferner sind die Winkel FCH und FDE rechte Winkel, folglich einander gleich, auch ist FH = FE, (nach dem Erwiesenen,) daher sind die beiden Dreiecke HCF und EDF congruent, (Euklid 1. Buch, 26. Satz.) folglich ist CH = DE.

Halbirt man hierauf die Seite DE, und errichtet auf ihr aus dem Halbirungspunkt K eine senkrechte Linie, welche verlängert die CH zwischen C und H schneidet, z. B. im Punkt I, und zieht ID und IE, so kann man auf ähnliche Art leicht zeigen, daß die Dreiecke EKI und DKI, so wie auch die Dreiecke EHI und DCI congruent sind, also CD = HE ist.

Sechster Lehrsatz.

In jedem Viereck ADEF, (Fig. 28.) in welchem zwei Winkel ADE und FED rechte Winkel, und die beiden gegenüberstehenden, an diesen rechten Winkeln liegenden Seiten DA und EF gleich sind, sind auch die beiden andern Winkel DAF und EFA rechte Winkel.

Beweis.

Man mache (Fig. 20.) HG = DE (in der 28. Fig.) errichte auf HG in einerlei Ebene aus den beiden Endpunkten G und H die senkrechten Linien GF und HC, mache GF = EF (in der 28. Fig.) und ziehe aus F die FI senkrecht auf HC, so ist auch GFI ein rechter Winkel (4. Lehrsatz) und HI = GF. (5. Lehrsatz.) Also ist auch HI = EF (in der 28. Fig.) und da EF = DA, (nach der Bedingung des Lehrsatzes,) so ist auch HI = DA. Nun lege man das Viereck HGFI der 20. Fig. gehörig auf das Viereck DEFA der 28 Fig. nemlich den Punkt H auf den Punkt D, und bringe die Seite HG in die Lage der Seite DE, so fällt der Punkt G in den Punkt E, (weil HG = DE nach der Construction,) da nun ferner bei H und G rechte Winkel sind, (nach der Construction,) und im Viereck DEFA bei D und E auch rechte Winkel sind, (nach der Bedingung,) so liegt HI in DA, und GF in EF. Es ist aber HI = DA, (nach dem Erwiesenen,) und GF = EF, (nach der Construction) Daher liegt der Punkt I im Punkt A, und der Punkt F der 20. Fig im Punkt F der 28. Fig. folglich decken sich die Vierecke HGFI und DEFA, also sind sie congruent. Daher ist der Winkel DAF = dem Winkel HIF, und da HIF ein rechter ist, (nach der Construction,) so ist DAF auch ein rechter. Auch ist der Winkel EFA = dem

Winkel GFI. Aber GFI ist ein rechter, (4. Lehrsatz) also auch EFA.

Bemerkung.

Nun folgt zunächst der Lehrsatz des Clavius, welcher der 23. Satz, Seite 44 in der vorigen ersten Theorie ist, und nach ihm folgen sodann die übrigen Sätze in der Ordnung, wie sie in der vorigen ersten Theorie aufgeführt sind.

Diese zweite, von mir hier aufgestellte Parallelentheorie weicht von allen bisher bekannten ab, und hat durchaus die erforderliche Einfachheit und hinlängliche Evidenz.

Erinnerung zu dem vierten Lehrsatz.

Man kann auch den Beweis dieses Lehrsatzes, mit Uebergehung des dritten Lehrsatzes, ausführen, wenn man die in der neuern Geometrie bei verschiedenen Sätzen gebrauchte Exhaustions-Methode auch hier anwendet. Nemlich: Wenn (Fig. 28.) in dem Viereck ADEF drei rechte Winkel bei A, D und E sind, und bewiesen werden soll, daß der vierte Winkel AFE auch ein rechter ist, so setze man, dieser Winkel AFE sei ein schiefer Winkel. Alsdann finden folgende zwei Fälle statt.

Erster Fall. Gesetzt AFE sei ein solcher schiefer Winkel, daß FA und ED verlängert, zusammentreffen. Dieses geschehe nun über H und B hinaus, z. B. im Punkt I, so entsteht ein bei D rechtwinkliches Dreieck ADI, in welchem der äussere Winkel DAF größer ist als der innere gegenüberstehende Winkel ADI. (Euklid 1. Buch, 16 Satz.) Aber ADI ist ein rechter Winkel, (nach der Bedingung des Lehrsatzes,) also ist DAF ein stumpfer Winkel. Dieses ist aber gegen die Bedingung des Lehrsatzes, folglich treffen FA und ED verlängert nicht über H und B hinaus zusammen. Gesetzt aber, AFE sei ein solcher schiefer Winkel, daß FA und ED über C und G hinaus verlängert zusammentreffen, z. B. im Punkt M, so ist ADM ein bei D rechtwinkliches Dreieck, in welchem der äussere Winkel DAH größer ist, als der innere gegenüberstehende Winkel ADE, welcher ein rechter ist. Also ist DAH ein stumpfer Winkel, gegen die Bedingung des Lehrsatzes. Es treffen daher FA und ED weder über B, noch über C hinaus zu-

sammen. Folglich ist AFE kein solcher schiefer Winkel, daß FA und ED verlängert zusammentreffen können. Es ist also der Winkel AFE entweder ein rechter, und dann wäre der Lehrsatz erwiesen, oder er ist dem rechten Winkel so nahe, daß FA und ED bei dem Abstand EF des Punkts F von der ED, verlängert nicht zusammentreffen, aber dennoch bei einem gewissen kleinern Abstand zusammentreffen würden, d. h. FA und ED sind nach der zweiten Art parallel.

Zweiter Fall. Es sei also (Fig. 28.) AFE = α, oder ein solcher schiefer Winkel, daß FA und ED nach der zweiten Art parallel sind, und der geringe Unterschied desselben von einem rechten Winkel = + d, (wenn nemlich α spitzig ist,) oder = — d, (wenn nemlich α stumpf ist,) so ist $\alpha \pm d$ einem rechten Winkel gleich. Es sei nun der kleine Winkel d das vielfache m eines andern Winkels δ, d. h. $d = m\,\delta$, man nehme also $\delta = \frac{1}{m} d$, und setze an den Punkt C einen Winkel, HCD, (20. Fig.) der = $\alpha + d - \frac{1}{m} d$ ist, wenn α spitzig, oder = $\alpha - d + \frac{1}{m} d$, d. i. = $\alpha - \left(1 - \frac{1}{m}\right) d$, wenn α stumpf ist. Der Winkel $\alpha \pm \left(1 - \frac{1}{m}\right) d$ heiße β, so ist β dem rechten Winkel näher als α, oder als AFE. Es sei also der Winkel HCD (Fig. 20.) = β, und die auf AB senkrechte CH sei = EF in der 28. Fig. Man nehme auf CD (20. Fig.) ein beliebiges Stück CF und fälle aus F auf CH die senkrechte FI. Hierauf theile man die Seite EF des gegebenen Vierecks (Fig. 28) in gleiche Theile, nemlich in die Hälfte, diese Hälfte wiederum in zwei gleiche Theile, und so fort, bis man einen Theil p oder EM auf EF bestimmt hat, der entweder = CI, oder zunächst kleiner als CI (20. Fig.) ist, und trage diesen Theil p von C aus auf CI, so fällt, wenn er kleiner als CI ist, sein zweiter Endpunkt M zwischen C und I. Aus diesem Punkt M errichte man auf CI eine senkrechte Linie, welche also mit IF parallel ist, und daher die Hypotenuse CF zwischen C und F in einem Punkt N schneidet. So entsteht ein rechtwinkliches Dreieck CMN, dessen Katheten CM = p, und MN sind. Nun hat man

vorher auf der Seite EF des gegebenen Vierecks, (28. Fig.) vom Punkt E aus, einen Theil EM = p bestimmt, und diesem Theil die CM (Fig. 20.) gleich gemacht, wenn man also auf der anliegenden Seite ED (Fig. 28) vom Punkt E aus eine Linie EQ = MN in der 20. Fig nimmt, und die Endpunkte M und Q mit einer geraden Linie MQ verbindet, so ist das bei E rechtwinkliche Dreieck MEQ (28. Fig.) mit dem bei M rechtwinklichen Dreieck CMN (20. Fig.) congruent, folglich die Hypotenuse MQ der Hypotenuse CN gleich, und der Winkel EMQ = MCN, (20. Fig.) = HCD $= \beta = \alpha \pm \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ d. Wäre p = CI gefunden worden, so hätte man statt des Dreiecks CMN (20 Fig.) das Dreieck CIF selbst vorgenommen, und EQ = IF gemacht. Hierauf fälle man aus dem Punkt M der Seite EF (28. Fig.) auf die gegenüberstehende Seite DA eine senkrechte Linie MP, welche auf DA so eintreffen wird, daß der Punkt P zwischen D und A liegt, weil bei D, P und A rechte Winkel sind. Folglich entsteht ein Viereck DEMP, in welchem ED und MP, so wie auch EM und DP gegenüberstehende Seiten sind, und welches drei rechte Winkel bei E, D und P hat. Der vierte Winkel desselben, am Punkt M, oder der Winkel EMP ist nun entweder ein rechter Winkel, oder ein solcher schiefer Winkel, daß ED und MP bei dem Abstand EM nicht zusammentreffen, folglich nach der zweiten Art parallel sind, welches wie bei dem ersten Fall bewiesen wird. Ist nun α spitzig, folglich β auch, d. h. HCD (20. Fig.) oder EMQ (28. Fig.) spitzig, so ist EMP größer als EMQ, d. i. größer als β, und folglich entweder dem rechten näher als β, oder selbst ein rechter, oder größer als ein rechter. Ist das letzte, so kann EMP doch nicht den rechten Winkel um so viel übertreffen, als der spitzige Winkel EMQ (Fig. 28.) von dem rechten Winkel übertroffen wird, das heißt: nicht um δ oder $\frac{1}{m}$ d, denn sonst wird die PM rückwärts verlängert, mit der über E nach C zu verlängerten DE in einem Punkt R zusammentreffen, weil MQ mit der verlängerten ED zusammentrift, und der Winkel, den die rückwärts verlängerte PM mit der senkrechten ME am Punkt M macht, dem Winkel EMQ gleich ist. Da also der Unterschied D des Winkels EMP von einem rechten Winkel weniger als der Winkel δ beträgt, um wel-

chen der spitzige Winkel EMQ oder β kleiner ist als ein rechter, das heißt, da D kleiner ist als δ, aber $\delta = \frac{1}{m}$ d ist, und m eine so große ganze Zahl seyn kann, als man will, folglich $\frac{1}{m}$ d ein so kleiner Winkel als man will, so ist der Unterschied D kleiner, als jede gegebene Größe, so klein sie auch seyn mag, d. h. der Winkel EMP ist vom rechten Winkel um weniger verschieden als sich angeben läßt, oder EMP ist ein rechter Winkel, also größer als α. Ist aber der Winkel AFE oder α stumpf, also β oder HCD (Fig. 20.) oder EMQ (Fig. 28.) auch stumpf, so ist EMP kleiner als EMQ, (wie nach dem ersten Fall gezeigt werden kann,) also entweder noch stumpf, aber doch dem rechten Winkel näher als EMQ, oder ein rechter Winkel, oder kleiner als ein rechter Winkel. Ist das letzte, so läßt sich, wie vorhin, darthun, daß er vom rechten Winkel um weniger übertroffen wird, als der Winkel EMQ den rechten übertrift. Nun ist der Ueberschuß des stumpfen Winkels EMQ über einen rechten Winkel = $\delta = \frac{1}{m}$ d. Also der Unterschied D des Winkels EMP von einem rechten kleiner als δ oder kleiner als $\frac{1}{m}$ d, und da die ganze Zahl m so groß angenommen werden kann als man will, so folgt, wenn wie oben geschlossen wird, daß D kleiner als jede gegebene Größe, d. h. EMP ein rechter Winkel, also kleiner als α ist. Nun war die Seite EF (Fig. 28.) des gegebenen Vierecks DEFA in gleiche Theile, jeder = p = EM getheilt, und es seien die Theilungspunkte auf der Seite EF, von M nach F zu, a, b, c, d, e u. s. f. Man trage den Theil p = EM auch auf der gegenüberstehenden Seite DA vom Punkt P an gegen A zu, so oft es angeht, auf, so daß die Theilungspunkte von P nach A zu a, b, c, d, e u. s. f. seien, so trift der letzte Theilungspunkt z entweder in den Punkt A oder nicht. Man verbinde endlich je zwei der gegenüberliegenden gleichnamigen Theilungspunkte a und a, b und b u. s. f. mit geraden Linien aa, bb, cc u. s. f. so entstehen lauter Vierecke, A, B, C u. s. f. jedes mit zwei gegenüberstehenden in EF und DA liegenden gleichen Seiten, nemlich im Viereck A ist ab = ab, im folgenden Viereck B ist bc = bc u. s. f. Das unterste Viereck EDPM aber, dessen Grund-

linie DE ist, hat vier rechte Winkel, nach dem Erwiesenen. Daher läßt sich, wie im fünften Lehrsatz, leicht zeigen, daß jede zwei der gegenüberstehenden Seiten desselben gleich sind, nemlich DP = EM und MP = ED. Da nun dessen obere Seite MP zugleich die Grundlinie des nächstfolgenden Vierecks A ist, und die Winkel an dieser Grundlinie rechte, auch die gegenüberstehenden Seiten ab und ab nicht nur unter sich, sondern auch dem Theil p oder der Seite EM des untersten Vierecks gleich sind; so läßt sich, nach Art des Beweises des sechsten Lehrsatzes, leicht darthun, daß das Viereck A mit dem untersten Viereck EDPM congruent ist, und folglich an den beiden obern Winkelpunkten in dem Viereck A auch rechte Winkel sind. Auf ähnliche Art kann man beweisen, daß das nächstfolgende Viereck B mit dem nächstvorhergehenden A congruent ist, folglich an dessen beiden obern Winkelpunkten auch rechte Winkel sind, und so ferner bei den folgenden Vierecken, daß C mit B, D mit C u. s. w. congruent ist, also an den beiden obern Winkelpunkten in jedem rechte Winkel sind, bis man zu dem obersten und letzten Viereck Z gelangt, bei welchem eben so bewiesen wird, daß dessen vier Winkel rechte Winkel sind. Nun fällt dessen obere Seite FZ entweder in die Seite FA des gegebenen Vierecks DEFA oder nicht. Ist das erste, so ist der Winkel AFE ein rechter, weil er zugleich ein Winkel des letzten Vierecks Z ist, also auch = EMP. Ist aber das zweite, so entsteht ein Dreieck, dessen eine Seite FA, die zweite Seite FZ, (nemlich die obere Seite des Vierecks Z,) und die dritte ein gewisses Stück der DA oder in deren Verlängerung über A hinaus ist. Dieses Dreieck aber hat zwei rechte Winkel, nemlich am Punkt A und am Punkt Z, welches unmöglich ist. (Euklid, 1. Buch, 17. Satz.) Daher liegt FZ in FA. Folglich ist der Winkel AFE oder α wiederum = EMP. Es ist aber, nach dem Vorhinerwiesenen, α nicht = EMP. Da nun dieses widersprechend ist, so ist die Annahme, α sei ein schiefer Winkel, unrichtig, folglich ist α ein rechter.

Schlußbemerkung.

Die vorzüglichsten der bisher erschienenen Paralleltheorien können in Beziehung auf die Aehnlichkeit der Methoden in folgende Classen geordnet werden.

Erste Classe. Die Theorie des Nassir-eddins, Clavius, Robert Simson, Bendavid, Kircher, Hoffmann, Metternich.

Zweite Classe. Die Theorien von Bertrand, Schultz, Crelle. (Diese gründen sich auf Vergleichung der unbegrenzten Winkelflächen, ermangeln aber der Evidenz, und führen, in so ferne das Unendlichgroße als gegeben betrachtet wird, auf Ungereimtheiten. Uebrigens ist die Behauptung des Herrn Crelle, daß das Unendlichgroße, als noch nicht vollendet, oder als progressiv betrachtet, nicht in die Elementargeometrie gehört, unrichtig. Man nehme unter den vielen Aufgaben nur diese: Ein gegebenes Quadrat zu vervielfältigen, welches in das Unendliche gehen kann u. s. f. Nur das Unendlichgroße, als vollendet betrachtet, gehört nicht in die Elementargeometrie.

Dritte Classe. Die Theorien von Segner und Lorenz gründen sich auf den Satz: eine gerade Linie, welche man durch einen Punkt innerhalb eines Winkels zieht, schneidet verlängert wenigstens einen Schenkel desselben.

Vierte Classe. Die Theorien von Kästner, Klügel, Schmidt, Bürger. Die von ihnen durch das Fortschieben einer geraden Linie an einer andern, so daß der Winkel, den beide mit einander machen, sich nicht ändert, bewirkte mechanische Construction hat keine Eleganz, auch übergehen sie den Beweis, worauf die Hauptsache beruht, daß wenn (Fig. 16.) GD an GE mit ungeändertem Winkel DGE nach E zu fortgeschoben wird, die Winkel, welche die durchgeschobenen Theile der GD mit der GH nach einerlei Gegend zu machen, immerfort gleich bleiben, oder wenigstens: daß diese erwähnten Winkel nicht bis auf Null abnehmen können, wo denn der Durchschnitt der GD mit der GH aufhören, und sie dann nicht mehr zusammentreffen würden, so weit man beide auch verlängern möchte.

Fünfte Classe. Die Theorien von Tacquet, Wolf, Helfenzrieder, Bezout, gründen sich auf die Erklärung, daß parallele Linien nur solche in einerlei Ebene befindliche gerade Linien heißen sollen, bei denen alle Punkte der einen von der andern Linie gleichweit abstehen. Durch sie ist in die Lehre von den Parallelen viele Verworrenheit gebracht worden.

Sechste Classe. Die Theorien von Hauff und Schweikart. Diese gründen sich auf die Voraussetzung der

realen Möglichkeit, eines Vierecks mit vier rechten Winkeln. In dem zweiten Abschnitt der Schweikart'schen Schrift ist Seite 103 der dritte Lehrsatz nicht in der dort aufgestellten Allgemeinheit gültig.

Siebente Classe. Schwab, Hindenburg und Karsten betrachten besonders die Eigenheiten der Lage gerader Linien.

Achte Classe. Die Theorie von Voigt gründet sich auf den entwickelten Begriff der geraden Linie.

Neunte Classe. Die Theorie des Proklus gründet sich auf den Satz: wenn eine gerade Linie eine der Parallelen schneidet, so schneidet sie, hinlänglich verlängert, auch die andere, oder mit andern Worten: Durch einen angenommenen Punkt ist mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie nur eine einzige parallele Linie möglich.

Zehnte Classe. Schwab, (in seiner ersten Theorie) so wie D. G. Simon Ohm, (in der Schrift: Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie, Erlangen, 1817. Seite 91.) nimmt den 27. Satz des ersten Buchs der Elemente Euklid's als Definition an.

Eilfte Classe. D. Martin Ohm, (in der Schrift: Kritische Beleuchtungen der Mathematik, Berlin, 1819. Seite 32 und 33.) giebt einen mathematisch-metaphysischen Beweis des 29. Satzes im ersten Buch der Elemente Euklid's, indem er den Leibnitzisch-Wolfischen Satz vom zureichenden Grund beizieht. Hierauf wird der 11. Grundsatz des Euklid's, als contraponirter Satz, indirect bewiesen.

Zwölfte Classe. Hier wird die Lehre von den Parallellinien auf den Satz gegründet, daß die Summe der drei Winkel eines jeden Dreiecks zweien rechten gleich ist, und dieser Satz vermittelst der Theorie des Unendlichgroßen bewiesen. (Siehe Wolf's neuen Auszug aus den Anfangsgründen 2c. Marburg, 1797. Seite 145.)

Dreizehnte Classe. Aus dem construir'ten Begriff der Richtung gerader Linien, und vermittelst der Definition: daß parallele Linien solche gerade Linien sind, welche dieselbe Richtung, also keine Neigung zu ein-

ander haben. (Siehe: Versuch die Lehre von den parallelen und convergenten Linien aus einfachen Begriffen herzuleiten, von D. C. C. H. Vermehren. Güstrow, 1816.)

Vierzehnte Classe. Auf die Voraussetzung, daß gleiche gerade Linien, unter gleichen hohlen Winkeln zusammengesetzt, zurückkehren, oder endlich die entgegengesetzte Richtung annehmen, gestützt, in J. H. C. Rehbein's Versuch einer neuen Grundlegung der Geometrie. Göttingen, 1795.

Chronologisch können die Verfasser der Paralleltheorien beiläufig so geordnet werden.

Euklid, (280 Jahre vor Christi Geburt); Proklus, (450 Jahre nach Chr. G.); Nassir-eddin Mahamat Ben Hassan, (1250); Clavius, (1600); Tacquet, (1650); Giordano da Bitonto, (1680); Wolff, (1710); Robert Simson, (1730); der Jesuit Saccherius, (1733); Hausen, (1735); Segner, (1747); Kästner, (1758); Klügel, (1763); Bossut, (1777 und 1800); Karsten, (1778); von Kesaer, (1778); Bertrand, (1778); Hindenburg, (1781 und 1786); Schultz, (1784); Lazarus Bendavid, (1786); Lorenz, (1791); Voigt, (1792); Gensichen, (1793); Hauff, (1793 und 1799); Legendre, (1794 und 1802); Rehbein, (1795); Schwab, (1801); Hoffman, (1801 und 1807); Adolph Kircher, (1803); Duvrier, (1808); Schweikart, (1808); Metternich, (1815); Vermehren, (1816); Bürger, (1816); Crelle, (1816); G. Simon Ohm, (1817); Martin Ohm, (1819).

Verbesserungen und Druckfehler.

Seite 13, Zeile 4, ist beizusetzen: 11) Crelle, über Paralleltheorien und das System in der Geometrie, Berlin, 1816. 12) Vermehren's Versuch u. s. f. 1816.

Seite 16, Zeile 6, von unten, bemerke ich in Beziehung auf den seit einigen Jahren sehr üblichen Ausdruck: aussprechen, daß solcher schon von Wolf in seinen Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften, und zwar im §. 401. der Astronomie gebraucht worden ist. Hier sagt er nemlich: „Kepler theilet die ganze „Ellipsin in 360 gleiche Theile, und durch diese Theile „und ihre Scrupel spricht er die mittlere Anomalie „aus."

Seite 18, Zeile 6, statt: auch kleiner, lies: also auch kleiner.

Seite 22, Zeile 2, von unten, können die Worte: an der nemlichen Seite, als überflüssig wegbleiben.

In der 16ten Figur der Kupfertafel ist zu dem Durchschnittspunkt der AB und EF der Buchstabe K zu setzen, und in der 28. Fig. kann man, der Deutlichkeit wegen, aus einem zwischen E und F der Seite EF bestimmten Punkt M eine Linie MP auf die gegenüberstehende Seite AD senkrecht ziehen.

Seite 64. Die Anfänger haben dabei die Richtigkeit des folgenden Syllogismus zu prüfen:

Die Lage der GH ist mit AB parallel,
Die Lage der GD ist nicht die Lage der GH,
Also ist die Lage der GD nicht mit AB parallel.

Ohne die Unbestimmtheit des Ausdrucks des Untersatzes zu tadeln, fehlt der Syllogismus, (der in der ersten Figur ist, also einen bejahenden Untersatz haben muß,) in der Form, weil der Untersatz verneinend ist.

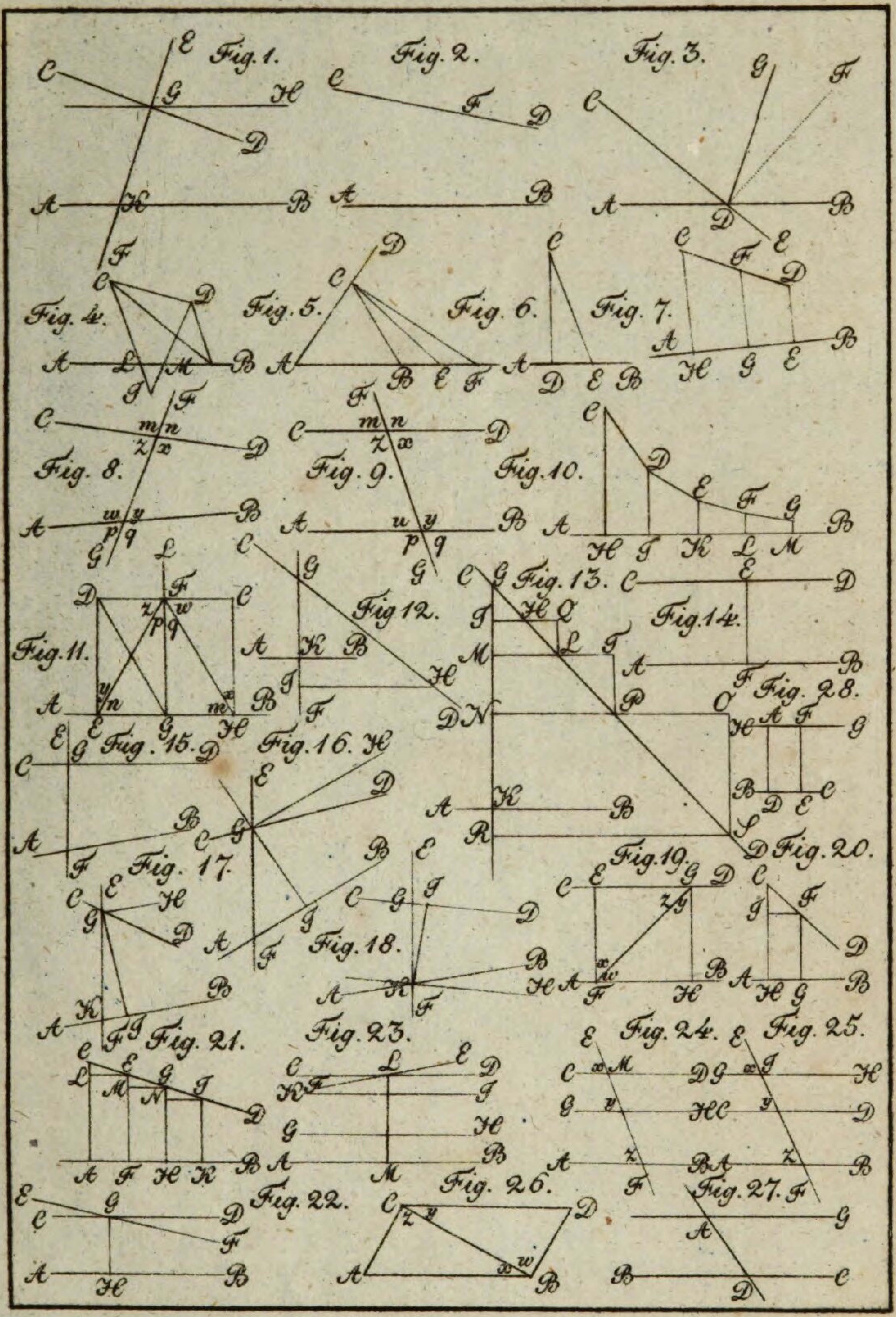
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann W.

Ausführliche evidente Theorie der Parallel-Linien

Nürnberg 1819

Math.p. 369 a
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082450-5